UNIVERSITÉ DE COPENHAGUE

CAHIERS DE L'INSTITUT DU MOYEN-AGE GREC ET LATIN
publiés par le directeur de l'Institut

- 32 -

HANNE LANGE

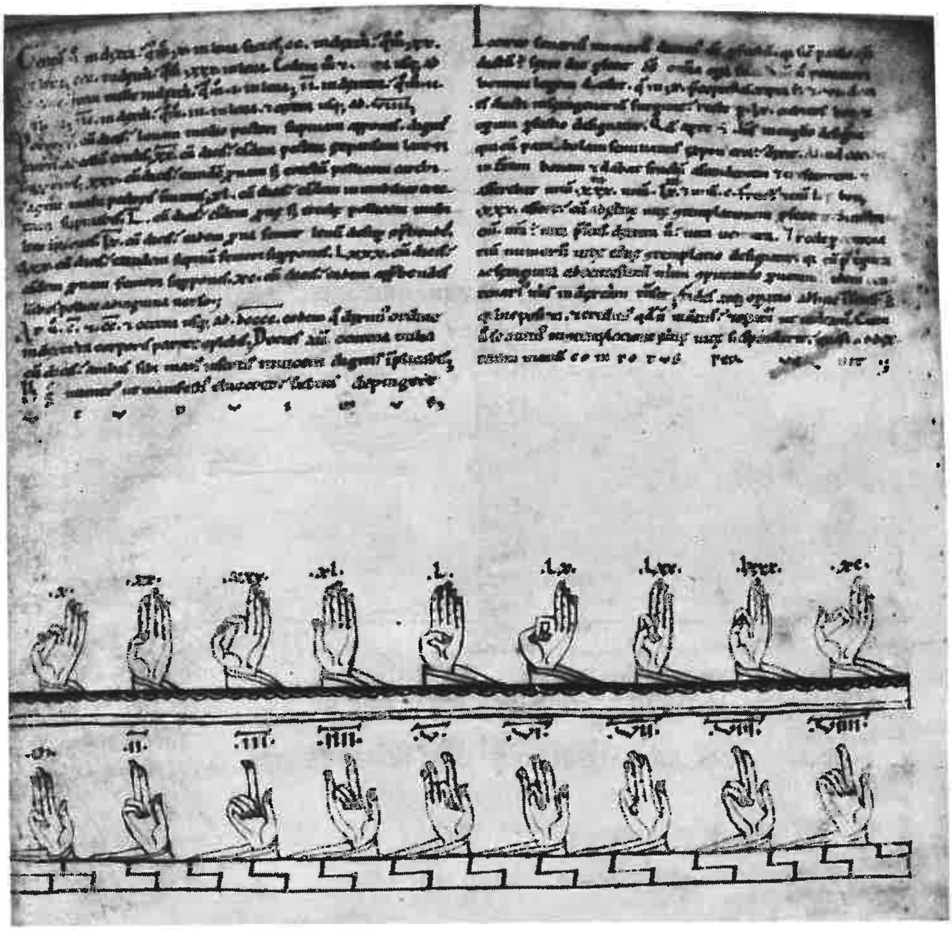
LES DONNÉES MATHÉMATIQUES DES TRAITÉS DU XII^{e} SIÈCLE SUR LA SYMBOLIQUE DES NOMBRES

suivi de

trois appendices

COPENHAGUE 1979

i kommission hos (distributeur):
ERIK PALUDAN - INTERNATIONAL BOGHANDEL,
FIOLSTRÆDE 10, DK-1171 København K.



figures de comput digital
(cf. *infra* p.46)
ms. Rouen, Bibl. Mun. 3055, f.4^r^

TABLE DES MATIERES

DEUXIEME PARTIE
LES SIGNES ET LES PROPRIETES DES NOMBRES

TROISIEME PARTIE
LA COMPOSITION DES NOMBRES

QUATRIEME PARTIE
LES RELATIONS ENTRE LES NOMBRES

A P P E N D I C E S

...

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Le présent fascicule contient

1º une *analyse d'ensemble* du contenu mathématique de cinq traités latins du XII^{e} siècle sur la symbolique des nombres :

GEOFFROY D'AUXERRE, *De sacramento numerorum a tredenario usque ad vicenarium*, suivi de *De creatione perfectorum et sacramento*, [1)]

HUGUES DE SAINT-VICTOR, *De numeris mysticis sacrae scripturae* (*De scripturis et scriptoribus sacris*, cap. XV), *PL* 175,22-23.

~~ODON DE MORIMOND, *Analetica numerorum et rerum*~~

GUILLAUME D'AUBERIVE, *Regule arithmetice* ou *"Extraits de Boèce"*

THIBAULT DE LANGRES, *De quatuor modis in quibus significationes numerorum aperiuntur*. [2)]

2º trois *appendices* :

I le texte du chapitre de HUGUES DE SAINT-VICTOR mentionné ci-dessus

II - deux lettres de GUILLAUME D'AUBERIVE s'expliquant sur son traité, suivies de ses
- "Règles arithmétiques" (ou "Extraits de Boèce")

III les tables des *Analetica* d'ODON DE MORIMOND, pour permettre au lecteur de se faire une idée de cet ouvrage en attendant notre édition du texte.

---

1) Voir notre édition *princeps* de ce texte dans *Cahiers de l'Institut du Moyen Age grec et latin*, nº 29, Copenhague, 1978, p. 1-28.
2) Voir notre édition *princeps* de ce texte *ib.* p.29-108.

Nous rappelons au lecteur que le présent "cahier" fait partie d'un plus vaste projet déjà présenté dans l'avant-propos de l'édition des textes de GEOFFROY et de THIBAULT. Pour plus de commodité nous en répéterons ici le

PLAN D'ENSEMBLE PROVISOIRE

INTRODUCTION GENERALE :

LES GRANDS JALONS DE LA SPECULATION SUR LES NOMBRES :

sources arithmétiques, philosophiques, patristiques; influences; écoles; place de notre *corpus* dans cet ensemble (à paraître).

COMMENTAIRES :

1. Les données mathématiques des traités du XII^{e} siècle sur la symbolique des nombres (le présent fascicule)
2. Les procédés d'exégèse symbolique des nombres chez les auteurs étudiés : sources, originalité, interdépendance (à paraître)

TEXTES :

1. ODON DE MORIMOND : *Analetica numerorum*... (à paraître).

2. GEOFFROY D'AUXERRE : *De sacramentis numerorum a tredenario usque ad vicenarium. De creatione perfectorum et sacramento* (paru dans *Cahiers de l'Inst. du M.-A. Grec et Latin*, nº 29).

3. THIBAULT DE LANGRES : *De quatuor modis quibus significationes numerorum aperiuntur* (paru dans *Cahiers de l'Inst. du M.-A. Grec et Latin*, nº 29).

4. Pièces justificatives : GUILLAUME D'AUBERIVE : *Regule* (ou "Extraits de Boèce"); lettres au moine Thomas et au maître A. de Besançon (le présent fascicule : *appendice* II).

BIBLIOGRAPHIE (à paraître) :

1. Ouvrages généraux (théologie, philosophie, sciences, etc.)
2. Etudes particulières (auteurs, nombres, etc.).

INDEX (à paraître) :

1. Index des nombres comportant tous les sens symboliques exposés dans les traités, avec explications et indications de sources (citations).

2. Index général.

Nous nous trouvons donc actuellement dans le dilemme de devoir faire une analyse d'ensemble de textes dont tous ne sont pas encore édités. Nous croyons néanmoins que ce problème ne constitue pas un empêchement majeur : les parties et les chapitres du traité d'ODON DE MORIMOND sont divisés en toutes petites unités - le lecteur pourra s'en rendre compte en se référant aux tables (Appendice, III) - si bien qu'il suffit de renvoyer aux divisions et subdivisions de la future édition.

INTRODUCTION

Niveau des connaissances mathématiques des auteurs

Avant d'aborder l'analyse des données mathématiques de nos traités - matière assez aride, ne le cachons pas - il convient de faire quelques remarques sommaires sur l'étendue, ou plutôt les limites, des connaissances mathématiques de nos auteurs. Pour le faire d'une manière équitable, il ne faut évidemment pas les soumettre à un jugement selon les principes des mathématiques modernes. Comme on pourra le constater en lisant les textes de l'édition, ces traités du XII^{e} siècle restent à un niveau mathématique assez élémentaire, d'accès pas trop difficile, même aux non-spécialistes. Si, toutefois, le lecteur éprouve des difficultés à interpréter certains passages, cela est moins imputable à la complexité des règles arithmétiques elles-mêmes qu'à la manière obscure dont, souvent, les auteurs les mettent en pratique. [1)] A cet égard, GEOFFROY D'AUXERRE est caractéristique : il n'est pas rare que son texte donne l'impression d'être une longue suite de devinettes.

Juger nos auteurs par rapport au niveau élevé atteint par les mathématiciens grecs, serait une autre façon de mal les interpréter. S'ils ont pu connaître la traduction d'EUCLIDE faite d'après l'arabe par ADELARD DE BATH, [2)] ils n'en tiennent cependant pas compte : ils se limitent, sans doute à bon escient, aux calculs des nombres entiers (addition, division, multiplication), ne traitent que sommairement des figures géométriques et des proportions et semblent tout ignorer

---

1) Or, nos auteurs imputeraient plutôt la difficulté de compréhension à l'ignorance du lecteur !

2) Voir M.CLAGETT, *The Medieval Latin Translations from the Arabic of the "Elements" of Euclid, with Special Emphasis on the Versions of Adelard of Bath,* dans *Isis*, 44, 1953, p. 16-42; J.E.MURDOCH, *The Medieval Euclid : Salient Aspects of the Translations of the "Elements" by Adelard of Bath and Campanus of Novara,* dans *Revue de Synthèse*, 3e série, nos 49-52, 1968, série générale, t. LXXXIX, p. 67-94 (= *Rapport du XIIe Congrès International d'Histoire des Sciences*).

de l'algèbre. Mais le leur reprocher serait faire montre d'un triomphalisme déplacé. En ce cas, on pourrait, dans une certaine mesure, jeter le même blâme sur leurs principaux modèles : BOECE, MACROBE, MARTIANUS CAPELLA et les Pères. Ce serait également oublier que l'intention première de nos auteurs n'est nullement de composer des manuels de mathématiques à usage scolaire ni de présenter à une élite de spécialistes une étude exhaustive sur la technique des nombres, mais, bien au contraire, d'exposer un ensemble de règles susceptibles de servir de bons outils à l'exégèse allégorique des nombres. Nos auteurs écrivent pour un public cultivé, certes, mais qui, probablement, n'a eu que des connaissances assez rudimentaires de la science des nombres. La manière dont s'adressent ODON et THIBAULT à leurs lecteurs semble en témoigner. Chez le premier, on sent un constant souci de tout expliquer jusqu'aux moindres détails. La peur de ne pas bien se faire comprendre ne le quitte pas : c'est le pédagogue qui ne craint pas de répéter sa leçon ni d'exemplifier la matière qu'il expose jusqu'à ce que même le cancre de la classe ait tout saisi. Cette conscience professionnelle est peut-être attribuable au milieu purement monastique dans lequel vivait ODON, milieu assez fermé aux sciences profanes (rappelons qu'ODON était, comme GEOFFROY, ami et secrétaire de saint BERNARD), mais aussi au sentiment qu'il a d'être le pionnier dans ce domaine : avant lui, dit-il dans son prologue, il n'existe pas de véritable traité systématique sur l'exégèse des nombres selon des principes arithmétiques.

THIBAULT, qui écrit une trentaine d'années plus tard, n'a pas besoin de prendre les mêmes précautions envers le public : d'autres lui ont frayé le chemin. Il a réuni en une "somme", affirme-t-il,[2a] sans même mentionner ni GUILLAUME ni ODON, ce qui était sans ordre et sans "art" ! Etant "magister", on peut supposer qu'il a joui d'une plus grande liberté d'expression que ses prédécesseurs cisterciens. Aussi n'a-t-il pas le même souci pédagogique qu'ODON. Il ne s'attarde pas, comme lui, à de longues explications, mais se borne à exposer l'essentiel. Il ne craint même pas, au besoin, de renvoyer son lecteur ailleurs pour chercher de plus amples informations. Ainsi, pour les parties constitutives du nombre, il recommande au lecteur de consulter lui-même l'ouvrage de MACROBE.[3] Il lui arrive même de traiter assez cavalièrement son lecteur : si celui-ci ne comprend pas son livre, dit THIBAULT en utilisant avec adresse une citation biblique, qu'il s'en prenne à lui-même : "est-ce peut-être la faute

---

2a) Prologue, texte, p. 31.

3) Texte p. 87, 3-4; p. 88, 9-10.

à la lumière s'il va en tâtons en plein midi" ? [3a]

Or, si les règles exposées dans nos traités restent, pour cause, à un niveau plutôt élémentaire, cela ne veut pas dire qu'elles soient toujours très simples. Nous verrons, dans les pages qui suivent, comment nos auteurs se livrent parfois à de longues démonstrations arithmétiques plus subtiles les unes que les autres. Si le lecteur moderne est peut-être agacé par la minutie avec laquelle un auteur circonscrit parfois un problème - cette critique vise surtout ODON - qu'il se rappelle que ce goût des moindres détails procède d'un esprit émerveillé de découvrir tant de "mystères " dans les nombres, ces "pensées" issues de l'esprit de l'UN, comme disaient les Platoniciens.

L'art des nombres et la théologie

Pour justifier l'emploi systématique de l'interprétation symbolique des nombres, nos auteurs arithmologiens ont besoin de donner à cet "art" une allure "scientifique", sans préjudice, naturellement, de la théologie. Pour se convaincre du souci qu'ils ont tous de mettre la science des nombres au service de la foi, il suffit de lire le prologue de THIBAULT ou le début de son épilogue [4] ainsi que la première partie de la longue introduction aux *Analetica* d'ODON. Les oeuvres de GUILLAUME D'AUBERIVE et de GEOFFROY D'AUXERRE sont pénétrées, du commencement à la fin, du même esprit. En cela, elles ne s'écartent nullement de la grande tradition, qu'il s'agisse de la tradition profane ou de la tradition chrétienne : c'est le thème antique de la "voie des sciences" qui mène à la philosophie ou à la théologie : [5] l'*ars numerorum* reste à sa place; elle n'est que science auxiliaire, *anxilla* de la théologie.

3a) *Deut.* XXVIII,29.

4) THIBAULT, texte, p. 31 et p. 106.
ODON se propose, dit-il (*prologue* I), de scruter, dans la théologie, les figures des nombres et des choses, science qui nécessite, comme tous les autres arts (rhétorique, dialectique, etc.) une initiation aux règles.

5) Déjà pour NICOMAQUE, *Introductio*... I, iii, 6, le nombre mathématique prépare l'étudiant au nombre ontologique; de même, PLATON, dans sa *République*, tient les mathématiques pour une introduction nécessaire à la philosophie (cf. W.D. ROSS, *Plato's Theory of Ideas*, Oxford, 1951, p. 226). On pourrait citer beaucoup d'autres témoignages provenant de la tradition profane.
Pour le rôle attribué aux arts libéraux dans l'exégèse allégorique, relevons quelques exemples dans la tradition patristique latine. On se souvient des recommandations d'AUGUSTIN dans son *De doctrina christiana*, II, 24-25 sur la nécessité de s'initier aux sciences pour comprendre et interpréter les *res* de la Bible, recommandations reprises par CASSIODORE dans ses *Commentaires sur les Psaumes* (*PL*, 70, 28) et par GREGOIRE : "Ad hoc quidem tantum liberales artes discendae sunt ut per instructionem illorum divina eloquia subtilius intelligantur" (*Commentaire sur Le Livre des Rois*, V, 30, *PL*, 79, 355).

Qu'il n'ait pas toujours été facile de faire admettre l'étude propédeutique des sciences dans tous les milieux ecclésiastiques, [6] surtout dans certains milieux monastiques, est un fait bien connu. On se souvient comment, au XIe siècle, PIERRE DAMIEN fulmine contre l'introduction de la science profane dans la discipline spirituelle : celui qui s'adonne à la science est semblable à l'homme qui quitte la femme libre pour l'esclave. [7]

Il existe également, au XIIe siècle, deux tendances contraires découlant de l'enseignement de SENEQUE sur les arts libéraux par rapport à la philosophie : [8] un courant dont les tenants craignent l'immixtion des sciences profanes dans la théologie et un autre courant qui réserve aux arts libéraux une place prépondérante dans l'étude de la théologie. Les remarques de THIBAULT sur ceux "qui vont à tâtons en plein midi",[9] les vives attaques d'ODON contre ceux qui méprisent la science des nombres,[10] les lettres d'apologie qu'adresse GUILLAUME D'AUBERIVE au maître A.de Besançon et au moine Thomas, [11] tout concorde à montrer que les préoccupations de nos auteurs étaient loin, elles aussi, de recueillir l'approbation de tout le monde.

Dans un prochain "cahier", nous verrons de plus près comment ces différends du XIIe siècle se répercutent dans le milieu de nos auteurs arithméticiens.

Nous trouvons le même programme chez BEDE, ALCUIN, RABAN MAUR et bien d'autres. Voir à ce propos GHELLINCK, *Le Mouvement théologique du XIIe siècle*, Bruges, 1948, p. 93-96 : *Appendice* II : *Le programme scolaire et le rôle propédeutique des sept arts* et *ib.* p. 560, n. 147; M.TH.-D'ALVERNY, *La Sagesse et ses sept filles. Recherche sur les allégories de la philosophie et des arts libéraux du IXe siècle au XIIe siècle*,dans *Mélanges Félix GRAT*, Paris, 1946, p. 245-278.

6) Voir, par exemple, E.GILSON, *La Philosophie et les arts libéraux*, dans les *Actes du IVe Congrès International de Philosophie Médiévale : Arts libéraux et Philosophie du Moyen Age*, Montréal, 1969, p. 269-271.

7) Cité par A. FOREST, F.VAN STEENBERGHEN, M.DE GANDILLAC, *Le Mouvement doctrinal du IXe - XIIe siècle*, Paris, 1951, p. 42-43. C'est aussi à PIERRE DAMIEN que nous devons le célèbre mot sur les risques que fait courir la grammaire, qui nous apprend à décliner le mot "dieu" au pluriel.

8) Tout en soulignant leur nécessité pour comprendre la philosophie, SENEQUE maintient envers les arts libéraux une attitude presque hostile : "liberales artes non perducunt animum ad virtutem, sed expediunt" (cf. GILSON, *art.cit.* (n.6), p. 269-271. Voir également, dans les *Actes du IVe Congrès International de Philosophie Médiévale...*:J.R. DONNELL, *The Liberal Arts in the Twelfth Century with Special Reference to Alexander Neckam (1157-1217)*, p. 127 ss).

9) *Epilogue*, p. 106, 3-4.

10) I, III, i.

11) Voir ci-après, *Appendice* II, p. 90.

Ressemblances et divergences entre les données mathématiques des traités.

Il est évident que l'on doit s'attendre à trouver, dans ces ouvrages sur les nombres, des catégories et des procédés mathématiques assez similaires : dans une large mesure, ils tirent leur matière des mêmes sources. Cette similitude se manifeste jusqu'au vocabulaire imagé. En parlant des opérations arithmétiques, par exemple, nos auteurs emploient, à l'instar de BOECE et des Pythagoriciens, la même terminologie de "prolifération" [1] et de "fructification" : les nombres "naissent" ou sont "créés" ou "procréés" par "génération" (*generatio*), par "agrégation" (*aggregatio*), par "progression" (*progressio*), ou par "procréation" (*procreatio*), ils produisent des fruits (*fructus*) et la "sève" du nombre racine monte dans ses "rameaux". Dans le même ordre d'idées, un certain vocabulaire affectif - s'inspirant peut-être de l'*Adversus Iovianium* de saint JEROME [2] - exprime les relations d'"affinité" ou d'"amour" qui existent entre certains nombres. Ainsi se rencontre fréquemment l'image du nombre qui "incline la tête pour en embrasser un autre", ce qui veut dire que les diviseurs des deux nombres arrivent à la même somme, appelée leur "nombre d'amour".

De même, malgré les grandes différences de fond, de forme, de volume existant entre ces traités, [3] il s'en dégage certaines lignes de force, communes à tout le *corpus*. Ainsi, chacun des auteurs propose un *aperçu des méthodes* selon lesquelles il sera possible de "découvrir" les significations des nombres. Les brèves indications de HUGUES DE SAINT-VICTOR [4] ont le mérite de constituer la première tentative connue de systématiser, selon les catégories arithmétiques, un usage traditionnel de l'exégèse biblique. Mais ce modeste début du Victorin n'est guère comparable aux chefs-d'oeuvre d'ingéniosité de ses disciples ou successeurs.

---

1) L'expression est celle de M.-D.CHENU, *Une définition pythagoricienne de la vérité* dans *Arch. d'Hist. doctr. et litt. du M.A.*, XXVIII, 1961, p. 10. Cf.également P. KUCHARSKI, *Sur la notion pythagoricienne du* καιρός *Rev.Philos.* 153, 1963, p. 142, n. 1 : "(le)verbe 'engendrer'(γεννᾶν), employé dans l'arithmo-géométrie des Pythagoriciens à propos de la formation des différentes espèces ou 'familles' de nombres constituant des 'séries' (nombres triangulaires, carrés, etc.) pouvait s'appliquer, évidemment, aussi aux propriétés des différents nombres de la décade".

2) *PL*, XXIII, 213.

3) ODON DE MORIMOND traite les nombres 1-3; GUILLAUME D'AUBERIVE les nombres 3-12; GEOFFROY D'AUXERRE continue l'oeuvre de Guillaume en interprétant les nombres 13-20; HUGUES DE SAINT-VICTOR et THIBAULT, enfin, synthétisent la matière en partant des catégories et non du nombre en particulier.

4) Voir ci-dessous, *Appendice* I , p. 83-85.

Dans les pages qui suivent, nous nous proposons de présenter, sous forme d' *analyse d'ensemble*, le contenu *mathématique* de ces méthodes - clés de l'interprétation symbolique des nombres. Tout en nous faisant éviter d'inutiles répétitions, ce procédé a aussi l'avantage de révéler d'emblée les divergences qui existent entre les traités. On se rendra compte, par exemple, que tel ou tel sujet n'est abordé que par un seul d'entre eux ou, encore, que certains titres ou "étiquettes" peuvent cacher des conceptions tout à fait différentes. De même, on s'apercevra que certaines catégories ne figurant pas parmi les modes d'interprétation affichés dans les têtes de chapitres, se trouvent parfois éparpillées à plusieurs endroits dans les textes. Ainsi, pour avoir une image globale du système d'un auteur, on est obligé de glaner partout dans son oeuvre, au lieu de s'en tenir aux indications sommaires des tables et des titres. Ce problème se pose particulièrement pour ODON et pour GEOFFROY.

Remarque

Pour plus de clarté, nous suivrons, dans notre analyse des catégories mathématiques, l'ordre du système de THIBAULT DE LANGRES, plus rigoureux, plus complet à certains égards, que celui de ses prédécesseurs.

Comme il s'agit en premier lieu d'exposer les faits mathématiques de nos traités, nous nous bornerons, pour l'instant, à ne donner en note que quelques exemples de leur application symbolique. Nous garderons donc pour un chapitre ultérieur, l'étude de l'aspect exégétique et philosophique de la symbolique des nombres. C'est pour cette raison que l'on ne trouvera pas non plus, dans les pages qui suivent, de renvois aux sources scripturaires ou patristiques. Celles-ci figurent dans les notes des textes d'édition et, sous une forme plus élaborée, dans l'*index* sur les significations des nombres (à paraître). Par contre, pour les sources purement mathématiques, nous avons trouvé plus utile de tracer, dès ce chapitre, les parallèles entre nos auteurs et leur principal modèle, BOECE, dont on trouvera en note de larges extraits. Quant aux sources en général et aux relations - existantes ou non - entre nos auteurs, nous réserverons cette question pour plus tard, lorsque tous les textes auront paru.

P R E M I E R E   P A R T I E

LA GENERATION DES NOMBRES [1]

Chez BOECE, on trouve souvent le mot de *generatio* à propos de la formation, par addition ou par multiplication, des nombres parfaits, des nombres pairement pairs, etc.

Chez GUILLAUME D'AUBERIVE,[2] c'est également un terme générique, alors que ODON DE MORIMOND et THIBAULT DE LANGRES en font une catégorie spécifique comportant des divisions et de nombreuses subdivisions que nous pouvons rendre ainsi schématiquement :

ODON :

G E N E R A T I O
- aggregatio
  - per continuationem
    - per pares
    - per impares
  - per intercisionem
    - per pares
    - per impares
- multi-plicatio
  - denominatio
    - per directionem
    - per transitionem
    - per conversionem
  - deductio
    - per reflexionem
    - per progressionem
    - per complexionem
    - per assumptionem

---

1) THIBAULT, I,i-iii, texte de l'édition, p. 32-58; ODON, II,I (*De speciebus et regulis generationum*).

2) *De sacramentis numerorum a ternario usque ad duodenarium*, ch.VI : *De generatione perfectorum et sacramento;* ch. VII : *Item quid significet quod a primis et incompositis perfectorum generatio surgat.*

HUGUES DE SAINT-VICTOR et GEOFFROY ne traitent pas de cette catégorie.

Chacune des sous-catégories de la multiplication comporte encore des subdivisions :

- denominatio
  - per directionem
    - se apposito
    - se amoto
    - brevis
    - producta
    - per continuationem
    - per intercisionem
    - per continuationem et intercisionem
  - per transitionem
    - iuncto se
    - seiuncto se
    - per continuationem
    - per intercisionem
    - per continuationem et intercisionem
  - per conversionem
    - recepto se
    - excepto se
    - per continuationem
    - per intercisionem
    - per continuationem et intercisionem
- deductio
  - per reflexionem
    - simplex
    - coniuncta
  - per progressionem
    - per continuationem
    - per intercisionem
  - per complexionem
    - per intercisionem
    - per continuationem
    - per continuationem et intercisionem
  - per assumptionem
    - per continuationem
    - per continuationem et intercisionem

THIBAULT :

GENERATIO
- aggregatio
  - continua
    - a generato
    - a generante
  - interscalaris
    - ab aggregato
    - ab aggregante
  - circumcisa
- particio
  - diminuti
  - superflui
  - perfecti
- multiplicatio
  - (ordinaire)
  - tetragoni
  - parte altera longiores
  - parte antelongiores
    - a multiplicante
    - a multiplicato

C'est dans la première subdivision de la deuxième partie (*clausula*)[3] de son traité qu'ODON expose la "génération des nombres et la définition de chacune de ses espèces" (II,I,ii), exposé suivi de vingt "règles de génération" et leur "utilité pour découvrir au maximum les significations positives ou négatives des nombres" (II, I ix).

Ainsi qu'il ressort des schémas ci-dessus, ODON traite seulement de deux espèces de génération : l'agrégation et la multiplication, auxquelles il applique d'ailleurs alternativement ou simultanément les mêmes règles (II,I,iii ss). THIBAULT ajoute à ces deux espèces une troisième : la partition. Bien que cette catégorie ne soit pas explicitement mentionnée par ODON, il en expose toutefois les principes dans les chapitres sur les nombres parfaits, abondants, défectifs (III,II,xiii-lv).

On le voit, il existe de très grandes divergences entre les deux systèmes, divergences que nous traiterons sous les subdivisions respectives dans les pages qui suivent.

3) Par la suite désignée II,I.

I
L'AGREGATION [1)]

I DEFINITION ARITHMETIQUE ET SUBDIVISIONS.

Si BOECE ne définit pas le terme d'*aggregatio* , il l'emploie plusieurs fois dans divers contextes qui ne laissent aucun doute sur le sens de ce mot : il s'agit d'une simple addition de n'importe quel nombre avec d'autres nombres. [2)]

Or, GUILLAUME D'AUBERIVE [3)] distingue deux sortes d'agrégation:

1. l'addition ordinaire (celle de BOECE)
2. l'addition des unités contenues dans un nombre avec le nombre lui-même.

Aucune de ces deux définitions ne correspond exactement à l'emploi que font de l'*aggregatio* ODON, GEOFFROY et THIBAULT [4)] : ils n'utilisent ce mot ni dans le sens d'une simple addition, ni dans l'acception trop étroite d' "addition des unités contenues dans un nombre avec le nombre lui-même". [5)] Pour eux - quoiqu'ils ne donnent aucune définition explicite de cette catégorie - l'agrégation désigne une addition des termes d'une progression arithmétique déterminée.

Pour cette *collectio nominativa numerorum* , selon l'expression d'ODON, [6)] THIBAULT propose trois subdivisions :

continua, interscalaris, circumcisa.

---

1) THIBAULT, I,i, 1-3 (texte, p. 33 ss); ODON, II, I, ii ss; GUILLAUME D'AUBERIVE, *Regule* (*"Extraits de Boèce")* ch. V, *Appendice* II, p.102; GEOFFROY D'AUXERRE, *Proemium* , texte, p. 4, 27.
HUGUES DE SAINT-VICTOR ne fait pas cas de cette catégorie.
2) Voir BOECE, *De Arithmetica* , éd. Friedlein, p. 42,28; 161,11; 170,19.
3) Voir ci-dessous, *Appendice* II, ch. V, p.102 (*Quomodo intelligenda sit aggregatio numerorum*).
4) HUGUES emploie l'expression *aggregatio partium* , c'est-à-dire "sommation des diviseurs d'un nombre" - cf. ci-dessous, p. 27 : *La partition.*
5) C'est la définition de l'*aggregatio continua* - cf. ci-dessous, p. 19.
6) II,I,i.

1. AGGREGATIO CONTINUA.

L'agrégation continue est l'addition d'un nombre avec toutes les unités qui le précèdent [7] ou, dans le langage d'ODON : "Continuationem dicimus cum nullus in ordine suo intermittitur numerus, sive cum multiplicamus, sive cum aggregamus". [8] On dirait en langage moderne : une progression arithmétique dans l'ordre naturel dont le premier terme est 1.

THIBAULT distingue entre deux sortes d'agrégation continue :

a) *a generante* (ou *ab aggregante*), c'est-à-dire que la signification du dernier terme (le nombre engendrant) de la série agrégée est en quelque sorte transférée au nombre sorti de l'opération arithmétique, alors que dans la catégorie

b) *a generato* (ou *ab aggregato*), c'est l'inverse qui a lieu : on part de la signification du nombre obtenu (le nombre engendré) par la sommation. [9]

Règles. THIBAULT achève sa subdivision sur l'agrégation continue en donnant trois règles dont il ne tire d'ailleurs aucune leçon symbolique :

a) aucune somme obtenue par agrégation ne fait immédiatement suite aux nombres qui la composent, à l'exception du nombre 3 (1+2 = 3, mais 2+3 = 5, etc.). [10]

---

7) THIBAULT, I,i (texte, p. 33,1-2): "... cum omnes partes alicuius numeri cum ipso aliquam summam constituunt"; GUILLAUME D'AUBERIVE : "... cum uniuscuiuslibet numeri omnes qui in ipso continentur numeros colligimus, ut ex eorum collectione numerus alius efficiatur" (*Regule*,ch.V, *Appendice*, p.102). Cf. aussi THIBAULT, p. 87ss : *Partes constitutive*.

8) II,I,iii. ODON a pourtant une conception légèrement différente de l'*aggregatio continua*,puisqu'il regroupe également sous cette étiquette l'*aggregatio interscalaris*,qui est une progression commençant à l'unité, mais de raison supérieure à 1: voir ci-après. GEOFFROY D'AUXERRE ne connaît qu'une seule agrégation : celle qui correspond à l'agrégation continue (cf. *Proemium* , texte, p. 4,27).

9) Ainsi, par exemple, le nombre des 300 soldats de Gédéon est significatif, parce qu'il est le résultat de l'agrégation de 24 (les 24 vieillards de l'Apocalypse). En effet, 1+2+3+4... +24 = 300. De même, 120 (les disciples sur lesquels descendit l'Esprit Saint) est particulièrement "honorable" à cause des 15 psaumes des montées (1+2+3... +15 = 120). L'exemple le plus célèbre est sans nul doute celui des 153 poissons, résultat de l'agrégation de 17 (= les 10 commandements et les 7 sacrements), exemple que THIBAULT répète d'après AUGUSTIN et GREGOIRE et bien d'autres (cf. *index*).

Inversement, 4 est appelé le premier "nombre limite" parce que 1+2+3+4 = 10 (les 4 évangiles engendrant la morale des 10 commandements). Le nombre 7 est attribué à Diane, à la lune, parce que son "agrégation" s'élève à 28, nombre des jours pendant lesquels la lune accomplit sa course. - Pour tous ces exemples, voir texte, p. 33-35 et *index* . Nous reviendrons sur cet aspect dans notre analyse des procédés exégétiques.

10) Cf. AUGUSTIN, *De musica* I,xii,22 (cf. édition de texte, p. 36,n.14).

b) règle de la sommation des nombres pairs d'une progression continue : si l'on multiplie la moitié d'un nombre pair par le premier impair qui le suit, on obtient la somme de l'agrégation du nombre pair. Ainsi la moitié de 4 multipliée par 5 = 10 = 1+2+3+4.

c) règle de la sommation des nombres impairs d'une progression continue : si l'on multiplie un nombre impair par sa plus grande "moitié", on obtient la somme de son agrégation :

5 x 3 = 15 = 1+2+3+4+5. [11)]

2. AGGREGATIO INTERSCALARIS SIVE PROGRESSIO. [12)]

L'agrégation interscalaire est l'addition soit des nombres pairs, soit des nombres impairs d'une progression [13)] ou, en langage moderne : une progression de raison supérieure à 1, soit de termes pairs soit de termes impairs. Ainsi l'agrégation interscalaire de 5 :

1+3+5 = 9 et celle de 6 : 2+4+6 = 12

THIBAULT subdivise encore cette agrégation en :

a) *a generante* (= *ab aggregante*) et

b) *a generato*(= *ab aggregato*).

Selon la première catégorie, le "fruit" de l'agrégation interscalaire de 10 (2+4+6+8+10) = 30. [14)]

Inversement, selon la deuxième catégorie, 18 *sumitur sacramentum* à cause de 90, qui est la somme de l'agrégation interscalaire de 18. [15)]

---

11) GEOFFROY rapporte le même exemple à propos du nombre 19 (texte, p. 19, 6-7). Il émet en plus une règle supplémentaire : le résultat de la multiplication d'un nombre impair par sa plus petite "moitié" = l'agrégation du nombre qui le précède : 9 x 19 = l'agrégation de 18. Pour les règles, voir ci-dessous, p.22ss

12) Comme déjà mentionné plus haut (n.8), ODON, range le procédé de l'agrégation interscalaire sous la rubrique : *aggregatio per continuationem* qu'il subdivise en : *per pares* et *per impares*. Ce qui complique quelque peu les choses, c'est que ODON réserve, dans sa deuxième *clausula* , le mot *progressio* à une catégorie de la multiplication (cf. plus loin, p.40) alors que, dans sa troisième *clausula* (III,I,viii), il emploie l'expression dans le sens que THIBAULT donne à *progressio* ou *aggregatio interscalaris*. - HUGUES et GEOFFROY passent sous silence cette catégorie.

13) THIBAULT, I,i,2; texte,p. 37,2-3.

14) C'est pourquoi on célèbre les morts par des prières le trentième jour, dit THIBAULT : pour avoir observé les 10 commandements, ils reçoivent leur récompense (le *denarium diurnum* des ouvriers de la vigne) qui est l'entrée dans l'ordre des saints (qui est le dixième). Cf. texte, p. 37, n. 1 et 3.

15) THIBAULT applique, après BEDE, ce calcul à la femme qui, depuis 18 ans, avait vécu sous l'emprise de Satan, mais qui fut guérie un jour de sabbat, c'est-à dire "élevée au nombre des anges" (allusion aux neuf ordres angéliques). Texte, p. 38, 1-6.

3. AGGREGATIO CIRCUMCISA.

L'agrégation circoncise est une progression qui ne commence pas à l'unité. [16)]

Si les catégories de l'agrégation interscalaire et de l'agrégation circoncise sont absentes, du moins de nom, des traités de GUILLAUME et de GEOFFROY, nous trouvons, par contre, chez ODON, une quatrième catégorie : [17)]

4. AGGREGATIO PER INTERCISIONEM, sorte de variante de l'agrégation interscalaire, dans laquelle l'ordre naturel des termes est interrompu par l'absence d'un seul nombre : [18)]

a) par nombres pairs : 2+4+8

b) par nombres impairs : 1+5+7

ODON ne développe pas cette variante de l'agrégation et n'en fait d'ailleurs aucune application symbolique. Par contre, il la traite sous la multiplication. [19)]

---

16)THIBAULT, I,i,3; texte p. 38,9-11. - THIBAULT ne fait d'ailleurs qu'une seule application scripturaire de l'agrégation circoncise : lors des fêtes du Tabernacle, les Juifs faisaient, pendant 7 jours consécutifs, des holocaustes de 13, puis 12, 11, 10, 9, 8, 7 veaux en mémoire des 70 membres de sa famille que Jacob introduisit en Egypte (7+8+9+10+11+12+13 = 70).

17)II,I,ii ss

18)"*Continuationem* dicimus, cum nullus in ordine suo intermittur numerus... *Intercisionem*, cum aliquis numerus eiusdem generis intermittur" (II,I,ii).

19)Cf. ci-dessous, p. 39.

II REGLES D'AGREGATION D'ODON

Dans ses vingt *regule generationis*, concernant donc à la fois l'*agrégatio* et la *multiplicatio*, ODON établit des règles minutieuses pour huit sortes de progression arithmétique. [20] On ne trouve pas trace de ces règles de sommation dans les autres traités, tout au plus une vague ressemblance entre telle règle de THIBAULT et telle autre d'ODON. Nous reviendrons ultérieurement sur les règles de multiplication, mais, dès maintenant, passons en revue celles qui ont principalement trait à l'agrégation : il s'agit des règles 16 à 29 de la deuxième *clausula* (II,I) du traité d'ODON.

ODON commence par distinguer entre la première, la deuxième, la troisième... *connexio* [21] d'une progression : ainsi,

1. *dans une progression qui se compose d'un nombre pair de termes pairs,* [22] la somme de la première "connexion" (2+4) = le nombre suivant de la progression (6). La somme de la deuxième "connexion" (2+4+6+8) = le double du nombre suivant de la progression, donc 2 x 10 = 20.

De même, la somme de la troisième "connexion" (2+4+6+8+10+12) = le triple du nombre suivant de la progression : 3 x 14 = 42.

Inversement, si l'on veut savoir si telle ou telle agrégation constitue la première ou la seconde... "connexion", on divise par 2 le nombre qui finit la progression, par exemple :

2+4+6+8+10+12 = la troisième "connexion", car 12 : 2 = 6, qui est le troisième terme de la progression.

De même, les règles de la "connexion" et de la multiplication se rejoignent dans une *pulcherrima speculatio*, une *amica coniunctio* dans le cas suivant : [23]

si l'on multiplie la moitié du dernier nombre de la progression par la moitié du nombre qui le suit dans l'ordre, le produit équivaut à la somme de l'agrégation :

dans la progression 2+4, 2 (moitié de 4) x 3 (moitié du nombre suivant) = 6 = la somme de 2+4.

---

20) II,I,ix ss. Il s'agit de progressions contenant :
1. un nombre pair de termes pairs
2. un nombre impair de termes pairs
3. un nombre pair de termes impairs
4. un nombre impair de termes impairs
5. des nombres disposés selon l'ordre naturel, commençant à l'unité et finissant par un nombre impair.
6. des nombres disposés selon l'ordre naturel, commençant à l'unité et finissant par un nombre pair.
7. un nombre impair de termes disposés selon l'ordre naturel, commençant ou non à l'unité.
8. un nombre pair de termes disposés selon l'ordre naturel, ne commençant pas à l'unité.

21) Par les exemples que présente ODON, il ressort que la première, la deuxième, la troisième *connexio* d'une progression de termes pairs sont les séries qui, à partir du premier terme, contiennent respectivement 2, 4, 6 termes. De même, la première *connexio* d'une progression de termes impairs, contient 3 termes; la deuxième : 5; la troisième : 7, etc.

22) 6e règle (II,I,xvi). Cf. *Appendice*, III, p.124.

23) 7e règle (II,I,xvii). Cf. *Appendice*, III, p.124.

Les huitième et neuvième règles concernent :

2. *les progressions se composant d'un nombre impair de termes pairs* :[24] la somme de la première "connexion" impaire (2+4+6) = 12, qui est le double du dernier nombre de la progression. La somme de la deuxième "connexion" impaire (2+4+6+8+10) = 30, qui est le triple du dernier nombre de la progression, et ainsi de suite. On le voit, la règle 2. n'est qu'une variante de la règle 1.

Inversement, en divisant le dernier terme de la progression par 2, on trouve l'ordre de la "connexion" en retenant la plus petite "moitié" du nombre obtenu :

2+4+6 = la première "connexion", parce que 6 : 2 = 3, dont la plus petite "moitié" est 1. Ainsi - ajoutons nous-même un exemple -

2+4+6+8+10+12+14 = la troisième "connexion", parce que 14:2 = 7, dont la plus petite "moitié" est 3.

La somme de l'agrégation de la première "connexion" (2+4+6)[25] = le produit de la multiplication du premier nombre impair par le deuxième nombre pair :

2+4+6 = 12 = 3 x 4. De même, pour la deuxième "connexion" impaire de termes pairs, on multiplie le deuxième nombre impair par le troisième nombre pair pour obtenir la somme de l'agrégation :

2+4+6+8+10 = 30 = 5 x 6,

etc.

3. *La progression se compose d'un nombre pair de termes impairs* :[26] dans ce cas, la somme de la première "connexion" = le double du nombre pair qui précède le dernier nombre de la progression :

3+5 = 8 = 2 x 4. - La somme de la deuxième "connexion" = le triple du nombre pair qui précède le dernier nombre de la progression :

3+5+7+9 = 24 = 3 x 8

etc.

Pour trouver la "connexion", on divise par 2 le dernier nombre de la progression. Ensuite, en divisant encore une fois la plus grande "moitié" par 2, on obtient l'ordre de la "connexion", qui est égal à la plus petite "moitié" du nombre divisé :

3+5+7+9 = la deuxième "connexion", car la plus grande "moitié" de 9 est 5, dont la plus petite "moitié" est 2,

etc.

De même, si l'on désire savoir si cette sorte de progression est paire ou impaire, on divise par 2 le dernier terme : si le résultat est un nombre pair, la progression est paire et vice versa :

2+4+6+8+10 est une progression impaire, car 10 : 2 = 5.

Là encore, les règles d'agrégation et de multiplication s'harmonisent:[27]

la somme de la première "connexion" = le produit de la multiplication du premier nombre pair par le deuxième nombre pair :

3+5 = 2x4.

La somme de la deuxième "connexion" = le produit du deuxième nombre pair multiplié par le troisième nombre pair :

3+5+7+9 = 4 x 6,

etc.

---

24) II,I,xviii. Cf. *Appendice* , III, p. 124.
25) 9e règle (II,I,xix). Cf. *Appendice*,III, p. 124.
26) 10e règle (II,i,xx). Cf. *Appendice*,III, p. 124.
27) 11e règle (II,i,xxi). Cf. *Appendice*,III, p. 124.

4. *La progression se compose d'un nombre impair de termes impairs* : [28]
La somme de la première "connexion" d'une telle progression équivaut au triple du nombre médian de la série :

3+<u>5</u>+7 = 15 = 3 x 5.

La somme de la deuxième "connexion" = 5 fois le nombre médian de la progression :

3+5+<u>7</u>+9+11 = 35 = 5 x 7,

etc.

Pour déterminer l'ordre de la "connexion", il suffit de diviser par 2 le dernier nombre de la progression et de retenir la plus petite partie de la plus petite "moitié". ODON n'en donne pas d'exemple, mais en voici un en guise d'illustration :

3+5+7 = la première "connexion", car la plus petite "moitié" de 7 est 3, dont la plus petite "moitié" est à son tour 1.

Pour savoir si la progression est paire ou impaire, on divise par 2 le dernier nombre de la série : si la plus petite partie est un nombre pair, la "connexion" est paire, et vice versa.

Dans la 13^{e} règle, [29] ODON continue sa démonstration en comparant le résultat de l'agrégation avec le produit de la multiplication de la progression impaire de nombres impairs : la somme de la première "connexion" :

3+5+7 = 15 = le produit de la multiplication du premier nombre impair par le deuxième nombre impair : 3 x 5. De même, la somme de la deuxième "connexion" :

3+5+7+9+11 = 35 = le produit de la multiplication du deuxième nombre impair de la progression par le troisième : 5 x 7,

etc.

5. *La progression, selon l'ordre naturel à partir de l'unité, finit par un nombre impair* : [30]
En ce cas, la somme de la première "connexion" = le double du dernier nombre de la progression :

1+2+3 = 6 = 2 x 3.

De même, la somme de la deuxième "connexion" = le triple du dernier nombre de la progression :

1+2+3+4+5 = 15 = 3 x 5, [31]

etc.

Inversement, en divisant par 2 le dernier nombre de la progression, on trouve l'ordre de la "connexion", qui équivaut à la plus petite "moitié" du nombre divisé :

1+2+3+4+5 = la deuxième "connexion", la plus petite "moitié" de 5 étant 2.

La somme de cette "connexion" est égale au produit de la multiplication du dernier nombre de la série par le nombre médian :[32]

1+2+<u>3</u>+4+<u>5</u> = 15 = 3 x 5.

6. *La progression, selon l'ordre naturel à partir de l'unité, finit par un nombre pair* : [33]
la somme de la première "connexion" = le nombre qui succède au dernier nombre de la progression :

1+2 = 3 [34]

---

28) 12^{e} règle (II,i,xxii). Cf. *Appendice*, III, p. 124.
29) II,I,xxiii. Cf. *Appendice*, III, p. 124.
30) 14^{e} règle (II,I,xxiv). Cf. *Appendice*, III, p.124.
31) Cette règle rappelle la troisième règle de THIBAULT : *aggregatio continua*, texte p. 39, 17 ss, sans y être identique.
32) 15^{e} règle (II,I,xxv). Cf. *Appendice*, III, p.124.
33) 16^{e} règle (II,I,xxvi). Cf. *Appendice*, III, p.124.
34) C'est l'exemple que donne THIBAULT dans sa première règle relative à l'agrégation continue (voir plus haut, p.19).

La somme de la deuxième "connexion" = le double du nombre qui succède au dernier nombre de la série :

1+2+3+4 = 10 (2 x 5).

De même, la somme de la troisième "connexion" = le triple du nombre qui succède immédiatement au dernier terme de la progression :

1+2+3+4+5+6 = 21 (3 x 7)

etc.

Si l'on divise le dernier nombre de la progression par 2, on obtient l'ordre de la "connexion" : ainsi, dans le dernier exemple :

6 : 2 = 3, qui est le numéro de la "connexion".

La sommation de cette série correspond au produit de la multiplication de la moitié du dernier nombre par celui qui lui succède,[35] ce qui donne, dans l'exemple mentionné ci-dessus :

6 : 2 = 3, qui à son tour multiplié par 7 fait 21. Ou, dans cet autre exemple :

1+2+3+4 = 10 = 2 x 5.

Les deux dernières règles concernant l'agrégation s'appliquent aux progressions, dans l'ordre naturel, qui ne commencent pas nécessairement à partir de l'unité *(a radicibus)* :

7. *<u>La progression se compose d'un nombre impair de termes disposés selon l'ordre naturel, commençant ou non par l'unité</u>* : [36]

si, dans une telle *collectio inequalis*, on multiplie le nombre de termes par le nombre médian de la progression, on obtient la somme de l'agrégation :

1+2+<u>3</u>+4+<u>5</u> = 15 = 5 x 3

2+3+<u>4</u>+5+<u>6</u> = 20 = 5 x 4.

Cette règle, dit ODON, "permanet in eternum et in seculum seculi"!

8. *<u>La progression se compose d'un nombre pair de termes disposés selon l'ordre naturel, mais ne commençant pas par l'unité</u>* : [37]

dans ce cas, en multipliant, par la moitié du nombre des termes, la somme du premier et du dernier terme de la progression, on obtient la somme totale de l'agrégation :

3+4+5+6; 3 + 6 = 9, qui multiplié par 2 (moitié des termes) font 18, donc la somme des termes.

Cette règle est identique à celle de THIBAULT, rapportée ci-dessous.[38]

On le voit, ODON procède avec une minutie qui frôle le pédantisme. Il faut pourtant se souvenir que son premier but n'est pas d'enseigner à ses lecteurs un savoir purement arithmétique, mais plutôt d'explorer, dans un esprit d'humilité et d'admiration, les curiosités et les merveilles du monde infini et secret des nombres. Il n'a pas remarqué que toutes ses règles d'agrégation - sans exception - peuvent se réduire à une seule, très simple, commune aux trois sortes d'agrégation, par laquelle THIBAULT clôt son chapitre sur l'agrégation :

---

35) 17e règle (II,I,xxvii). Cf. *Appendice*, III, p. 124.
36) 18e règle (II,I,xxviii). Cf. *Appendice*, III, p. 124.
37) 19e règle (II,I,xxix). Cf. *Appendice*, III, p. 124.
38) P.26 (texte, p. 39,12-17).

III REGLE SIMPLIFIEE DE THIBAULT

Cette règle, qui rend inutiles toutes les autres, dit que si l'on multiplie la somme du premier et du dernier nombre d'une progression quelconque par la moitié du nombre des termes dont elle se compose, on obtiendra la somme totale de son agrégation. Ainsi, dans cette progression de raison 4, composée de 8 termes :

$$1+5+9+13+17+21+25+29 \quad = \quad 120.$$

La somme de 1 et de 29 (premier et dernier termes) = 30, qui multiplié par 4 (la moitié des termes) fait également 120.

De même pour une progression qui se compose d'un nombre impair de termes :

$$1+5+9+13+17+21+25 \text{ (7 termes) :}$$

$$1+25 = 26; \quad 7 : 2 = 3\tfrac{1}{2}; \; 26 \times 3\tfrac{1}{2} = 91$$

qui est la somme de l'agrégation.

II

LA PARTITION [1)]

Sous ce titre se cache une des notions de l'arithmétique pythagorico-nichomachénne les plus répandues, les plus exploitées, à la fois par les arithméticiens et les exégètes : celle des nombres parfaits,[2)] déficients,[3)] et abondants.[4)]

La *particio* (THIBAULT, GEOFFROY) ou l'*aggregatio partium* (HUGUES) ou la *collectio partium* (ODON)[5)] consiste à additionner les diviseurs (parties aliquotes) d'un nombre, à l'exception du nombre lui-même :

si la somme des parties excède le nombre, celui-ci est "abondant".[6)] Ainsi 12 est un nombre abondant, parce que la somme de ses diviseurs 1,2,3,4,6 = 18.

Si, au contraire, la somme est inférieure au nombre, celui-ci est "déficient"[7)] : par exemple, 8 dont la somme des diviseurs 1,2,4 = 7.

Si, enfin, la somme des parties aliquotes est égale au nombre lui-même, c'est un nombre "parfait": [8)] ainsi 28, dont la somme de ses parties aliquotes 1,2,4,7,14 = 28. On peut l'exprimer ainsi (S = somme, N = nombre) :

$$S^N = N \qquad (S^{28} = 28)$$

---

1) THIBAULT, I,ii; texte, p. 41-52; HUGUES, *Appendice*,I,7; ODON, II,II,xiii-xv; GUILLAUME, *Regule*, ch. IV, *Appendice*,II, p.1o1; GEOFFROY, *Proemium* , p.4,24-26.

2) Voir, par exemple, EUCLIDE, *Elementa* , VII,22 (éd. Itard, p. 84); NICOMAQUE, *Introd. arithm.* ch. XVI (éd. Karpinski, Robbins, d'Ooge, p. 209-212); BOECE, *Inst.arithm.* I, 19 (éd. Friedlein, p. 41,7-20); AUGUSTIN, *De Gen. ad litteram*, IV, ii, 2 et 5, et surtout *De civ. Dei* , XI,30...

3) Voir, entre autres, NICOMAQUE, *op.cit.* XV, (...d'Ooge, p. 207-208); BOECE,*op. cit.*I,19 (éd. Friedlein, p. 40, 13-15 et 19-23); AUGUSTIN,*De gen.ad litt.*IV,ii,5.

4) Cf. NICOMAQUE, *op.cit.* XIV (...d'Ooge, p. 207-208); BOECE, *op.cit.* I,19 (éd. Friedlein, p. 39-40), surtout, p. 40,13); AUGUSTIN, *De gen.ad litt.* IV, ii,5.

5) ODON n'indique pas, parmi ses huit "modes de signification", cette catégorie, mais il traite des nombres déficients, parfaits et abondants dans II,II,xiii-xv.

6) Il existe plusieurs désignations en latin : *abundans* (ODON, GUILLAUME); *superfluus* (BOECE, GEOFFROY, THIBAULT); *plus quam perfectus* (AUGUSTIN); *ultra quam perfectus*(BOECE); *superabundans* (THIBAULT).

7) *diminutus* (BOECE, ODON, GUILLAUME, GEOFFROY, THIBAULT); *imperfectus* (BOECE, AUGUSTIN); *immunitus* (GUILLAUME).

8) *perfectus* (BOECE, GUILLAUME, GEOFFROY, THIBAULT); *sufficiens* (ODON).

I. NOMBRES DEFICIENTS.

Parmi les théoriciens du XII^{e} siècle qui font l'objet de notre étude, seuls GUILLAUME et THIBAULT consacrent plus de quelques lignes à cette catégorie des nombres. HUGUES ne la mentionne pas; ODON se contente d'en donner une définition[9)] avec quelques exemples d'application symbolique ; GEOFFROY[10)] remarque - après BOECE - que les nombres déficients sont plus nombreux que les nombres parfaits et il en tire quelques considérations morales à propos du nombre 20 : ce nombre, abondant, se compose de 2 x 10 (ce dernier est un nombre déficient) :

$$S^{20} = 22 \quad \text{alors que} \quad S^{10} = 8$$

Ainsi le nombre 20 "gagne", par sa partition, les deux unités"perdues" par les deux nombres dix.

GUILLAUME D'AUBERIVE,[11)] après en avoir donné la définition suivie de quelques exemples, constate que tous les nombres premiers sont nécessairement déficients puisqu'ils n'ont pas de parties aliquotes.

THIBAULT, enfin, se limite , comme ODON, à formuler une définition arithmétique,[12)] accompagnée de quelques démonstrations, pour tout de suite passer à l'interprétation de certains nombres bibliques.[13)]

II NOMBRES ABONDANTS

Cette catégorie n'a pas, elle non plus, beaucoup retenu l'attention de nos arithméticiens. HUGUES la passe sous silence; ODON définit brièvement ce que c'est qu'un nombre abondant [14)] pour ensuite passer à l'exemple du nombre 12 et son "sacrement". GUILLAUME[15)] en donne la définition suivie de quelques exemples, sans plus; GEOFFROY y fait allusion dans son chapitre sur le nombre 20.[16)] Dans son *De creatione perfectorum...*, considérant la rareté de la perfection morale, il se restreint à faire remarquer que les nombres abondants,

---

9) "Diminutus numerus est cuius partes collecte summam nequeunt equare totius" (II,II,xiii).

10) Dans son chapitre sur le nombre 20, texte, p. 20, 14-15; p. 21, 3-5.

11) *Regule* , ch. IV, *Appendice* , II, p.101.

12) II,i, texte p. 41, 10-12 : "Diminutus est numerus ille, cuius partes denominative simul aggregate ad eum usque non pertingunt".

13) Ainsi, Noé, de la 10^{e} génération après Adam, introduisit 8 âmes dans l'Arche mais il n'en sauva que 7, car

$$S^{10} = 8 \quad \text{et} \quad S^{8} = 7.$$

C'est l'exemple que GEOFFROY donne dans son chapitre sur le nombre 20.
De même, la Bête de l'Apocalypse, *que octava est* , engendre de ses côtés les 7 péchés capitaux.

14) II,II,xv : "Abundans numerus est cuius partes collecte summam totius excedent".

15) *Regule* , IV, *Appendice* , II, p. 101.

16) Texte, p. 20, 14 ss (cf. ci-dessus, n. 10).

tout comme les nombres déficients, sont plus nombreux que les nombres parfaits. [17)]

THIBAULT, après sa définition arithmétique,[18)] passe en revue une série de nombres de la Bible.[19)]

III NOMBRES PARFAITS

Voilà enfin une catégorie des nombres qui, depuis les Pythagoriciens, à travers EUCLIDE, NICOMAQUE, BOECE... et, du côte des Pères, PHILON, AUGUSTIN, GREGOIRE... n'a cessé d'exercer une fascination particulière sur les esprits. Aussi, les nombres parfaits occupent-ils une place importante chez les théoriciens du XII^e^ siècle.

Chez HUGUES, ils constituent les seuls exemples donnés sous la rubrique : *aggregatio partium* , [20)] et si GUILLAUME D'AUBERIVE, dans ses *Regule*,[21)] ne fait qu'énoncer les premiers nombres parfaits - 6 et 28 -il revient ultérieurement sur deux sortes particulières de "perfecti" : les nombres d'"amour" et les nombres d'"affinité". [22)] De même, au coeur de son traité sur les nombres 3 à 12, nous trouvons un long développement sur les nombres parfaits à propos du nombre 6.

ODON, après une brève définition, [23)] prend également pour modèle - suivant la longue tradition patristique - le nombre 6.

Dans son traité sur les nombres 13 à 20, GEOFFROY n'a aucune occasion de traiter la "perfection" des nombres : il n'y a pas de nombres parfaits entre 13 et 20. Par contre, il y consacre un petit traité à part : *De creatione perfectorum et sacramento*,[24)] dans lequel il étudie les cinq premiers nombres parfaits (6,28,496,8128,130816) avec leurs particularités propres et leurs "significations". Nous reviendrons nécessairement là-dessus.

---

17)Texte, p. 23, 14-16.
18)"Superabundans est numerus ille cuius partes denominative in unum nodum collecte, ultra ipsum luxuriant" (p.42,13-14).
19)Ainsi, par exemple, le célèbre nombre 40, nombre de la pénitence, "abonde", par la somme de ses parties aliquotes, en 50, nombre du jubilé ou date à laquelle les Juifs rendaient les biens à l'ancien possesseur. On reconnaît d'ailleurs, dans quelques passages, des emprunts textuels faits à la lettre sur le nombre 40 que GUILLAUME a adressée au moine ETIENNE. Le texte de cette lettre a été publié par J.LECLERCQ, dans son article *L'arithmétique de Guillaume d'Auberive*, dans *Analectica Monastica* , 1ère série, *Studia Anselmiana* , 20, 1948, p. 199-202.
20)Voir *Appendice*, I , p.83.
21)Ch. IV, *Appendice*, II, p. 102.
22)Voir ci-dessous, p.102 : les nombres "amiables", les nombres d'"amour", les nombres d'"affinité".
23)II,II,xiv : "Sufficiens numerus est cuius partes collecte summam totius equant".
24)Voir texte, p.23-28.

Quant à THIBAULT,[25)] il réunit, dans son chapitre sur les nombres parfaits, toutes les connaissances et subtilités véhiculées par le riche héritage de la tradition patristique et profane. C'est donc encore une fois le traité de THIBAULT que nous prendrons pour cadre de notre exposé.

Après de nombreuses applications traditionnelles (bibliques et profanes),[26)] THIBAULT revient à l'arithmétique pure dans le paragraphe consacré à :

1. LA CONSTRUCTION DES NOMBRES PARFAITS.[27)]

La règle assez compliquée de la construction des nombres parfaits remonte à EUCLIDE;[28)] elle a été retransmise à NICOMAQUE et à BOECE,[29)] pour enfin être adoptée par les théoriciens du XII^{e} siècle (à l'exception pourtant de HUGUES et d'ODON).

Voici la formule euclidienne dans la traduction de P.-H.MICHEL : pour créer un nombre parfait, il faut disposer

> "a partir de l'unité, tant de nombres qu'on voudra... successivement proportionnels en raison double, jusqu'à ce que leur somme soit un nombre premier, et si on multiplie cette somme par le dernier (terme) de la progression de raison 2, le produit sera un nombre parfait." [30)]

Ex.:

$1+2 = 3;\quad 2 \times 3 = 6;\qquad 1+2+4;\quad 4 \times 7 = 28$

GEOFFROY et THIBAULT - ce dernier semble copier textuellement, dans cette page, le début du traité de GEOFFROY[31)] - présentent une variante de la règle :

---

25) I,ii, texte, p. 44, 10-11 : "Perfectus est numerus ille cuius partes collecte quandam ei reverentiam exhibentes, ipsum numerum non excedunt".

26) Nous y reviendrons ultérieurement dans notre commentaire consacré aux procédés exégétiques.

27) *Quomodo creentur perfecti* (I,II,iii,1).

28) *Elementa*, IX,36. Voir P.-H.MICHEL, *De Pythagore à Euclide*, p. 343-344 et J.ITARD, *Les Livres arithmétiques d'Euclide*, p. 197. Selon C.M.TAISBAK, *Perfect Numbers. A Mathematical Pun ?* dans *Centaurus*, 20,1976,p.269-275, la découverte des nombres parfaits remonterait à l'emploi des anciennes méthodes égyptiennes de multiplication.

29) I,20 (éd. Friedlein, p. 42,24).

30) Cette théorie de la création des nombes parfaits à partir d'un nombre premier (obtenu par l'agrégation de nombres pairement pairs) multiplié par le dernier terme de la progression, est soigneusement exposée dans l'*Inst.arithm.* I,2o de BOECE : "...Disponantur enim omnes pariter pares numeri hoc modo :
I. II. IIII. VIII. XVI. XXXII. LXIIII. CXXVIII.
Facies ergo ita. Pones .I. eique adgregabis .II. Tunc respicias ex hac adgregatione qui numerus factus sit. Inde .III. qui scilicet primus et incompositus est; et post unitatem ultimum binarium numerum adgregaveras. Si igitur ternarium, id est qui ex coacervatione collectus est, per binarium multiplices, qui est ultimus adgregatus, perfectus sine ulla dubitatione nascetur..." (éd. Friedlein, p. 42,1 ss). Les exemples que donne BOECE par la suite se retrouvent chez THIBAULT.

31) *De creatione perfectorum*... p. 23,1ss; p. 27, 11-13.

au lieu de multiplier le dernier terme de la progression par la somme (quand celle-ci est un nombre premier), ils multiplient, par sa plus grande "moitié", le nombre obtenu. On voit, il ne s'agit que d'une question de terminologie, car le dernier terme de la progression s'avère être justement la plus grande "moitié" de la somme :

1+2+4+8+16 = 31, qui multiplié par 16, sa plus grande moitié, (et en même temps, dernier terme) produit 496. Par contre, toujours selon cette règle, la série :

1+2+4+8 = 15 ne peut créer un nombre parfait, puisque 15 n'est pas un nombre premier.

GUILLAUME D'AUBERIVE,[32] GEOFFROY D'AUXERRE [33] et THIBAULT DE LANGRES [34] soulignent tous, après BOECE,[35] la "pénurie" des nombres parfaits ; ainsi, il ne se trouve qu'un nombre parfait contenu dans chaque série des nombres limites :

au-dessous de	10	: 6
au-dessous de	100	: 28
au-dessous de	1000	: 496
au-dessous de	10 000	: 8 128

BOECE s'arrête là, mais THIBAULT qui copie GEOFFROY, [36] ajoute que la cinquième série (au-dessous de 100 000) est "stérile", ce qui est arithmétiquement vrai. Au-dessous de 1000 000 se trouve le nombre 130 816.[37] Nos auteurs font également remarquer, après BOECE, que les nombres parfaits finissent toujours par 6 ou par 8.[38]

GEOFFROY[39] attire l'attention sur une autre subtilité qu'on ne retrouve pas chez ses émules : à savoir que tout nombre parfait égale la somme de l'agrégation d'un nombre impair figurant parmi ses parties aliquotes :

$6 = S^3$; $28 = S^7$; $496 = S^{31}$; $8\ 128 = S^{127}$; $130\ 816 = S^{511}$.

---

32) *Regule* , ch. VI, *Appendice*, II, p. 103 ss

33) *De creatione perfectorum* ..., p. 23,14-15.

34) I, ii, *De perfectis* , p. 47,11-12.

35) *Inst.arithm.* I,20 (éd. Friedlein, p. 41-23 - p. 42,10).

36) *De creatione perfectorum* ..., p. 25, 14-15 : "Quinta series... sterilis est ut opinor".

37) Aujourd'hui, on a trouvé sept nombres parfaits après 130 816 : $2^{12}\ (2^{13}-1) = 33\ 550\ 336$; $2^{16}\ (2^{17}-1) = 8\ 568\ 910\ 416$; $2^{18}\ (2^{19}-1)$; $2^{30}\ (2^{31}-1)$; $2^{60}\ (2^{61}-1)$; $2^{88}\ (2^{89}-1)$; $2^{126}\ (2^{127}-1)$; Cf. HEATH, *Mathematik*, I, p. 74 s. (cité par Karpinski, Robbins, d'Ooge : NICOMAQUE, *Introd. arithm.* p. 209, n. 2).

38) BOECE, *Inst.arithm.* I,20, p.42,6-8; GUILLAUME, *De ternario usque ad duodenarium* , IX : *De octonario* ; GEOFFROY , *De creatione perfectorum*...p.27,1-3; THIBAULT, III,ii, p. 88,3-4.

39) *De creatione perfectorum*...p.27,5-11.

Le même résultat est obtenu en multipliant, par la plus grande "moitié", chacune de ces parties aliquotes :

3 x 2 = 6; 7 x 4 = 28; 31 x 16 = 496; 127 x 64 = 8 128;
511 x 256 = 130 816.[40]

2. LES DIVERS SENS DU MOT "PARFAIT"

THIBAULT achève son court paragraphe *Quid sit limes*, en indiquant le double sens, arithmétique et biblique, de "nombre parfait" : dans la Bible, tout nombre limite (10, 100, 1000 ... ou encore 10, 20, 30...) est "parfait". C'est-à-dire que, dans la Bible, sont appelés parfaits 10 et ses multiples et non uniquement - comme dans la théorie pythagoricienne transmise par BOECE - les nombres qui sont égaux à la somme de leurs parties aliquotes.

Mais l'usage est encore plus flou : "nombre parfait" peut être, dans la Bible, n'importe quel nombre qui se distingue d'une manière ou d'une autre. ODON l'appelle aussi *electus*. Déjà AUGUSTIN fait la distinction entre l'usage biblique et l'usage arithmétique du mot *perfectus*.[41]

A la suite de GUILLAUME D'AUBERIVE, qui ne donne d'ailleurs que d'assez vagues indications là-dessus,[42] THIBAULT énumère treize divers "genres de perfection",[43] sans, pourtant, prétendre être exhaustif.

Du domaine de la philosophie des nombres, il tire l'exemple bien connu de MACROBE disant que

1º *la première "perfectio incorporalitatis" se trouve dans les nombres*.[44]

Dans le domaine arithmétique, il a encore recours à MACROBE : les nombres parfaits sont :

2º *ceux qui conservent la puissance qu'ont leurs parties*[45]
3º *ceux qui créent des dimensions ("corpora efficiunt")*
4º *ceux qui sont eux-mêmes des dimensions ("corpora efficiuntur")*.

---

40) Cf. la règle mentionnée ci-dessus, p. 31, en haut.
41) *De gen.ad litt.* IV,ii,2 (*perfecti / pleni*). La confusion remonte d'ailleurs jusqu'aux Pythagoriciens : dans la théorie platonicienne, les nombres particuliers comme le nombre 3 (premier triangle) et la décade (engendrée par agrégation de 4) sont aussi appelés "parfaits" ou "pleins", usage adopté par les Pères. Cf. L. ROBIN, *La Théorie platonicienne*..., p. 274.
42) *De ternario* ... ch. V : *De diversis generibus perfectorum et eorum sacramento* (BN fonds lat. 2583 (=notre P^2), f. 3^r.
43) I,ii, *De perfectis*, 3, texte, p. 49 ss.
44) *Comm.Somn.Sc.* I,v,13.
45) Cf. *Secundum compositionem* , III,ii, p.87-89.

5º *la cinquième perfection provient de l'intégrité des parties* : ainsi le nombre 3 est privilégié, parce qu'il a un commencement, un milieu et une fin.

6º *la sixième perfection est la "perfection par engendrement"* : la perfection du nombre 3 est transférée "par engendrement" à 6 et à 9.

7º *un nombre est parfait quand il se distingue par sa pureté* : c'est l'exemple de 7, nombre vierge, parce qu'il n'engendre ni n'est engendré lui-même.

8º *les nombres limites sont parfaits.*

9º *les monades sont parfaites* : elles engendrent d'autres nombres, mais ne sont pas elles-mêmes engendrées.

10º *le nombre 1000 est parfait* : il indique à la fois fin et limite.

11º *le nombre est parfait si, dans le calcul digital, il se forme dans la main droite.*

12º *le nombre pair, qui se divise en parties égales, est parfait.*

Et enfin, la définition purement arithmétique d'un nombre parfait :

13º *le nombre est parfait quand il est égal à la somme de ses parties aliquotes.*

Cette énumération mériterait quelques commentaires, mais nous aurons l'occasion de revenir là-dessus. [46)]

3. LES NOMBRES "AMIABLES", LES NOMBRES D'"AMOUR" ET D'"AFFINITE"

A la partition s'attachent encore trois autres notions dont seules les deux dernières jouent un rôle dans le symbolisme des nombres du XII[e] siècle : il s'agit des nombres "amiables" (ou "amis"), des nombres d'"amour" et des nombres d'"affinité".

Les nombres "amis" remontent aux Pythagoriciens [47)] et semblent avoir été confondus avec les nombres d'"amour". Témoin IAMBLIQUE, dans son commentaire sur l'*Introduction à l'arithmétique* de NICOMAQUE : [48)]

> "Certains hommes, enfoncés dans l'erreur, pensaient que le nombre parfait était appelé *amour* par les Pythagoriciens à cause de l'union et de l'affinité entre les différents éléments qui existent en lui. Car ils appellent au contraire certains autres

---

46) Pour quelques sources de ce passage (MACROBE, BOECE, MARTIANUS CAPELLA, JEROME, AUGUSTIN...), voir les notes du texte de l'édition, p. 49-50.

47) Voir P.-H. MICHEL, *De Pythagore à Euclide* , p. 343 et p. 346.

48) Cité par J. ITARD, *Les nombres premiers* , p. 37-38.

nombres, *amiables*, donnant aux nombres des vertus et des qualités sociales, comme 284 et 220, car les parties de chacun d'eux ont le pouvoir d'engendrer l'autre, suivant les règles de l'amitié, comme l'affirmait Pythagore."

Deux nombres sont "amiables" si la somme des parties aliquotes de chacun d'eux égale l'autre. C'est le cas de l'exemple cité par IAMBLIQUE :

$$S^{284} = 220; \qquad S^{220} = 284$$

La confusion entre nombres "amiables" et nombres d'"amour" semble s'être perpétrée chez les mathématiciens arabes. DICKSON [49)] cite un témoin du IX^e siècle qui désigne les nombres "amis" comme "se invicem amantes".

Chose curieuse, aucun de nos auteurs du XII^e siècle ne fait état de ce phénomène. La raison en est sans doute que le cas est très rare : le couple 220-284 semble être le seul connu par les arithméticiens de l'Antiquité. [50)]

Par contre, les auteurs qui nous occupent - mis à part HUGUES et ODON - connaissent ou définissent les notions de nombre d'"amour" et de nombre d'"affinité". Mais là encore semble régner une certaine confusion, surtout chez GEOFFROY D'AUXERRE.

Mais commençons par la définition pittoresque que donne GUILLAUME D'AUBERIVE du *numerus amoris* : si l'addition des parties aliquotes de deux nombres différents aboutit à la même somme, celle-ci est leur nombre d'"amour", parce qu'en lui "ils s'unissent comme dans un baiser de paix" ou "baiser d'amour". [51)] Ainsi, par exemple, le nombre d'amour entre 12 et 26 est 16, somme des parties aliquotes de 12 (1,2,3,4,6) et de 26 (1,2,13). De même, 13 est nombre d'amour entre 27 (1+3+9 = 13) et 35 (1+5+7 = 13). 8 est nombre d'amour de 10 et 49; 17 de 39 et 55. [52)]

---

49) *Theory of Numbers* , I,p.36.

50) P.-H.MICHEL, *op.cit.* p.346.

51) *Regule* , ch. VI, *Appendice* , II, p.103 : "Numerus amoris est, cum diversorum numerorum partibus sigillatim aggregatis, ex utrarumque partium collectione unus et idem numerus redditur... quia in ipso, duo illi, velut in pacis osculo, coniunguntur... in amoris osculo copulantur."

52) *Regule*, *Appendice*, II, p.103. THIBAULT ne traite pas des nombres d'amour sous la partition, mais dans la quatrième partie de son ouvrage : *De habitudine* , sous la rubrique *affinitas denominationis* (texte, p. 103). Cf. plus loin, p.81,4. Remarquons cependant tout de suite que cette dernière appellation désigne, chez GUILLAUME et GEOFFROY, une ressemblance entre les noms des nombres, p.ex. entre "ternarius" et "tricenarius" !

GUILLAUME D'AUBERIVE définit ainsi le nombre d'affinité : lorsque deux nombres engendrent, chacun de son côté et de manière différente, un troisième et même nombre, celui-ci est leur nombre d'affinité :[53)]

1º 8 est nombre d'affinité entre 10, 2 et 4, puisque

s^{10} ou 2 x 2 x 2 ou 2 x 4 = 8 [54)]

12 est nombre d'affinité entre 6, 4, 3, 2 :

6 x 2 ou 4 x 3 = 12

2º De même, il y a affinité entre 7 et 12, puisque

3 x 4 = 12 et 3 + 4 = 7 [55)]

Nous reviendrons sur ces nombres d'affinité à la fin de cette analyse des données mathématiques de nos traités.

Mentionnons, pour clore ce chapitre, la notion de *fructus*, expression employée plusieurs fois par GUILLAUME D'AUBERIVE pour désigner la différence (reste) entre un nombre et ses parties aliquotes. D'abord,[56)] il remarque cette particularité que, dans une progression arithmétique de raison 12, commençant à 30, tous les termes ont le même reste (*fructus*), à savoir le nombre 12 lui-même :

$$s^{30} = 42 = 30 + 12$$
$$s^{42} = 54 = 42 + 12$$
$$s^{54} = 66 = 54 + 12$$
$$s^{66} = 78 = 66 + 12$$
$$s^{78} = 90 = 78 + 12$$

Après 78, cependant, seuls les nombres dont le résultat de la division par 6 est un nombre premier et incomposé, ont pour "fruit" 12.[57)] Contrôlons la véracité de cette affirmation de GUILLAUME par quelques exemples :

s^{90} = 144 : le "fruit" n'est pas 12, car 90 : 6 = 15, nombre composé.

s^{126} = 186 : le "fruit" n'est pas 12, car 126 : 6 = 21.

---

53)*Regule* , ch. VI, *Appendice*, II, p.103: "Numerus affinitatis est cum numeri diversi in aliquem sibi numerum occurrunt, sed modo diverso, viaque dissimili".

54)THIBAULT appelle cette affinité *affinitas obviationis* (texte, p. 104). Cf. plus loin, p. 81,5.

55)THIBAULT appelle cette affinité *affinitas compositionis* (texte, p. 104). Cf. plus loin, p. 82,6.

56)Cf. aussi sa Lettre au moine Thomas, *Appendice*,II, p.90-91.

57)*Regule*, ch. VI, *Appendice*, II, p.103et son traité *De ternario ...*, ch. XXXII: *De sacramento aggregationis duodenarii, et qui numerorum duodenarium fructificent et qui ultra procedant.*

Par contre :

$$S^{102} = 114 = 102 + 12 \quad (102 : 6 = 17\text{, nombre premier})$$
$$S^{114} = 126 = 114 + 12 \quad (114 : 6 = 19\text{, nombre premier})$$
$$S^{138} = 150 = 138 + 12 \quad (138 : 6 = 23\text{, nombre premier})$$

Aucun de nos autres auteurs ne mentionne cette curiosité, pourtant riche en possibilités d'interprétations symboliques.

III

LA MULTIPLICATION [1)]

I THIBAULT commence son court exposé sur la multiplication par une définition [2)] suivie d'exemples :

7 x 7 = le carré (*tetragonus*)

2 x 3 = *parte altera longior*

2 x 4 = *parte antelongior* [3)]

Ensuite, il passe à l'interprétation symbolique, aspect que nous laisserons de côté pour l'instant pour rendre compte des renseignements arithmétiques contenus dans ce chapitre.

1. LE NOMBRE CARRÉ.

Après de nombreuses interprétations symboliques du nombre carré, THIBAULT expose quelques données arithmétiques générales. Ainsi, il constate, [4)] que tout nombre carré est "superficiel", c'est-à-dire qu'il contient deux dimensions et que, parmi les nombres "limites", seuls sont carrés le deuxième, le quatrième, le sixième... selon une "quadam interscalaris quadrature progressio" : il s'agit donc de 100, 10 000, 1000 000 ... De même, nul carré n'est le double d'un autre carré, dit THIBAULT, sans mentionner que ceci n'est vrai que pour les nombres entiers, mais faux en géométrie : les Grecs connaissaient parfaitement la duplication du carré et même celle, beaucoup plus diffile, du cube. [4a)]

---

1) THIBAULT, I,iii (p. 53-58); (la rubrique de HUGUES, *Secundum multiplicationem* se range plutôt dans la catégorie *Secundum partes constitutive* de THIBAULT, III,ii, p.87-89); ODON, II,I,v ss; GEOFFROY, *Proemium* , p. 5 (*Septima differentia*); GUILLAUME D'AUBERIVE n'a pas de chapitre sur la multiplication dans ses *Regule*.

2) "Multiplicatio est, cum aliquis numerus per seipsum in alium, vel per alium, vel alios, surgit in alium maiorem" (p. 53). BOECE ne donne pas de définition particulière de la *multiplicatio*, catégorie sans doute trop connue pour avoir besoin d'être expliquée. ODON (II,I,ii) la définit ainsi : "Unius per alium numerum adverbaliter facta diductio".

3) Les *parte altera longiores* sont les nombres dont un des deux facteurs est plus grand que l'autre d'une unité; dans les *parte antelongiores* un des deux facteurs a deux ou plusieurs unités de plus que l'autre.
C'est la conception pythagoricienne des nombres figurés qui est sous-jacente à ce chapitre de THIBAULT. Sur les nombres figurés, voir la troisième partie du traité : III,i-iii (p. 90 ss) et ci-dessous, p. 63 ss

4) Cf. le PSEUDO-BOECE, *Ars Geom.* : "Superficies vero est, quod longitudine latitudinique censetur" (Friedlein, p. 374,6; Folkerts, p.).

4a) Cf. *Histoire générale des Sciences*, t.I : *La Science antique et médiévale* (éd. sous la direction de René TATON), Paris, 1966, p. 232 s.

2. LES PARTE ALTERA ET ANTELONGIORES.

La multiplication par des facteurs différents comporte, selon THIBAULT, deux modes : *a multiplicante, a multiplicato*,[5] qui jouent chacun son rôle dans l'interprétation symbolique :

1º *a multiplicante* : c'est le nombre multiplicateur qui donne la signification au résultat de l'opération.[6]

2º *a multiplicato* : c'est le multiplicande qui donne sa signification au produit de la multiplication.[7]

Les exemples de ce paragraphe pourraient être classés, avec autant de droit, dans le chapitre sur la composition : *Que sint partes constitutive* ou dans celui qui traite de l'*affinitas compositionis*[8] ou, chez ODON, dans les chapitres : *Secundum partes, secundum unam partem.*[9] Constatons donc l'extrême pauvreté, au point de vue arithmétique, du passage que THIBAULT consacre à la multiplication : en fait, il se borne à une définition et à quelques considérations sur le nombre carré, les parte altera et antelongiores.[10] Nous ne tirerons pas davantage profit, en ce qui concerne l'arithmétique, de HUGUES[11] ni de GEOFFROY[12] ni de GUILLAUME D'AUBERIVE.[13] Aucun de ces auteurs n'a donc tenu compte de l'exposé purement arithmé-

---

5) Cf. *aggregatio* : *ab aggregante, ab aggregato* (texte, p. 33-35).

6) Ainsi le nombre 3 dans l'exemple des 153 poissons, selon l'exégèse de saint GREGOIRE : 17 x 3 = 51, qui multiplié encore par 3 = 153. THIBAULT renvoie aussi à AUGUSTIN, qui obtient le même résultat par l'agrégation de 17. (AUGUSTIN donne quatre différentes explications de 153, cf. *index*).
De même pour les 150 psaumes :
10 (les commandements) multiplié par 15 (psaumes des montées)
ou les 77 fois qu'il faut pardonner à son prochain :
7 (univers) multiplié par 11 (transgression des commandements)= la naissance du Christ dans la 77e (7 x 11) génération depuis Adam, pour sauver l'humanité de ses péchés universels.

7) Par exemple : l'âge (16 ans) de Joseph (dont le nom signifie "augmentation) :
16 x 31 = 496 (le troisième nombre parfait)
ou 16 x 10 = deux "fruits" : 100 + 60, allusion aux nombres de virginité (100) et de chasteté (60) et en dernier lieu à la parabole du semeur. Cf. plus loin, p.49. GEOFFROY, p. 13 (sur le nombre 16 "selon la multiplication") apporte le même exemple. Sous le nombre 15, il parle du premier "fruit" (30, symbole du mariage) qu'on trouve également chez THIBAULT (cf. plus loin, p.49).

8) THIBAULT, III,ii, p. 87-89, et IV, iii, p. 104-105.

9) ODON, III,I,v,vi et viii.

10) Il faut pourtant ajouter que, à la fin de son paragraphe sur l'agrégation continue, il donne quelques règles de multiplication en relation avec la sommation des séries : voir plus haut, p. 19-20.

11) *Secundum multiplicationem*, *Appendice* I, p.85.

12) Comme HUGUES, GEOFFROY aborde la catégorie de la multiplication uniquement au point de vue symbolique.

13) Ce dernier ne mentionne pas la multiplication dans ses *Regule*, *Appendice* II.

tique très détaillé (sans exemples d'application symbolique) que fait ODON de la multiplication.[14] Nous le résumerons aussi brièvement que possible.

II REGLES D'ODON SUR LA MULTIPLICATION (CF. SCHEMAS, p. 15-16).

Comme pour l'agrégation, ODON distingue entre plusieurs modes de multiplication :

1. la *continuatio* :[15]

   par pairs (2 x 4)
   par impairs (3 x 5)
   par pairs et impairs (2 x 3)

2. l'*intercisio* :[16]

   par pairs (2 x 6, où 4 est "interposé")
   par impairs (3 x 7, où 5 est "interposé")
   par pairs et impairs (2 x 5)

3. la *continuatio* et l'*intercisio* combinées :[17]

   par pairs (2 x 4 x 8 : on saute 6)
   par impairs (3 x 5 x 9 : on saute 7)
   par pairs et impairs (2 x 3 x 5 : on saute 4)

Ces trois modes se retrouvent dans la plupart des subdivisions de la multiplication.

1º La première espèce de la multiplication, la *denominatio*,[18] se fait :

1. *per directionem*, c'est-à-dire que la multiplication suit l'ordre naturel des nombres :

   1º *se apposito* : 2 x 2 x 3 x 4

   2º *se amoto* : 2 x 3 x 4

   Quand la *denominatio per directionem* ne contient que deux nombres, elle est appelée *brevis*; *producta*, si elle contient trois nombres ou davantage.

2. *per transitionem*, c'est-à-dire qu'un nombre qui se trouve au milieu de la série est celui qui, selon l'ordre naturel, est le premier ou le dernier :

   1º *iuncto se* : 3 x 2 x 3 x 4

   2º *seiuncto se* : 3 x 2 x 4

3. *per conversionem* , c'est-à-dire que le dernier nombre, selon l'ordre naturel, vient en tête :

---

14) II,I,iii et v-viii, xi-xiv.

15) II,I,iii. Rappelons que la *continuatio* d'ODON comprend aussi la catégorie *interscalaris* de THIBAULT (cf. plus haut, p. 19, n. 8).

16) II,I,iii. L'*intercisio*, pour ODON, est la progression dans laquelle un seul nombre est sauté dans l'ordre naturel des chiffres (cf. plus haut, p. 21) .

17) II,I,iii.

18) II,I,v.

1º *recepto se* : 4 x 2 x 3 x 4

2º *excepto se* : 4 x 3 x 2

La *conversio* ne se fait pas à moins de trois nombres.

Toutes les espèces de la *denominatio* peuvent se faire *per continuationem*, *per intercisionem* ou par les deux à la fois.[19]

IIº La deuxième espèce de la multiplication, la *deductio*,[20] se fait :

1. *per reflexionem* , c'est-à-dire que le nombre est multiplié par lui-même. La *reflexio* peut être :

   1º *simplex* (puissance de 2) : 2 x 2; 3 x 3

   2º *coniuncta* (puissance de 3) : 2 x 2 x 2; 3 x 3 x 3

2. *per progressionem* (deux nombres, deux termes), c'est-à-dire que le nombre est multiplié par le nombre qui le suit dans l'ordre naturel :

   1º *per continuationem* : 2 x 3

   2º *per intercisionem* : 2 x 4

3. *per complexionem* (trois nombres, trois termes), c'est-à-dire l'union des deux formes de la *progressio* :

   1º *per continuationem* : 2 x 3 x 4

   2º *per intercisionem* : 2 x 4 x 5

4. *per assumptionem* (deux nombres, trois termes), c'est-à-dire que le nombre est multiplié par lui-même et par un autre :

   2 x 3 x 2; 2 x 3 x 3

Après ces explications minutieuses, que nous avons rapportées sous forme schématique, ODON donne, parmi les règles de génération des nombres, cinq règles spécifiques de multiplication :[21]

1. *le produit de la multiplication par lui-même d'un nombre pair = le carré de sa moitié multiplié par 4* :

   $4 \times 4 = 2^2 \times 4; \quad 6 \times 6 = 3^3 \times 4$

2. *le produit de la multiplication par lui-même d'un impair = la somme de l'addition d'une série contenant autant de termes que le facteur impair a d'unités et dans laquelle sont disposés, dans l'ordre naturel, les pairs et les impairs qui entourent le facteur, de façon à ce que celui-ci devienne terme médian de la série* :

---

19) II,I,vi.
20) II,I,vii-viii.
21) II,I,xi-xv. Ces règles ne proviennent pas de BOECE.

$$3 \times 3 = 2 + \underline{3} + 4$$
$$5 \times 5 = 3 + 4 + \underline{5} + 6 + 7$$

3. *le produit de la multiplication d'un nombre impair par un autre nombre, pair ou impair = la somme de l'addition d'une série contenant autant de termes que le nombre impair a d'unités et qui, ou bien commence par le plus petit facteur ou bien renferme, disposés de manière égale, les nombres pairs et impairs qui entourent le plus grand facteur, de façon que celui-ci devienne, dans les deux cas, terme médian de la série* :

$$3 \times 5 = 3 + \underline{5} + 7 \quad \text{ou} \quad 4 + \underline{5} + 6$$
$$3 \times 4 = 3 + \underline{4} + 5 \quad \text{ou} \quad 2 + \underline{4} + 6$$

ou encore :[22]

$$\begin{aligned} 5 \times 11 = {} & 5 + 9 + \underline{11} + 13 + 17 \quad (=55) \\ & 6 + 10 + \underline{11} + 12 + 16 \quad (=55) \\ & 7 + 9 + \underline{11} + 13 + 15 \quad (=55) \\ & 8 + 10 + \underline{11} + 12 + 14 \quad (=55) \\ & 9 + 10 + \underline{11} + 12 + 13 \quad (=55) \end{aligned}$$

4. *la multiplication d'un nombre pair par un autre nombre pair – ou d'un nombre impair par un nombre pair* :

1º *la multiplication d'un nombre pair par un autre pair* =

a) *la moitié du plus grand nombre multiplié par le double du petit nombre, ou*

b) *la moitié du plus grand nombre multiplié deux fois par le plus petit nombre, ou*

c) *le plus petit nombre multiplié par la moitié du grand nombre multiplié à son tour par le plus petit* :

$$2 \times 10 = \text{a) } 5 \times 4; \quad \text{b) } 5 \times 2 \times 2 \quad \text{c) } 2 \times 5 \times 2$$

2º *la multiplication d'un nombre impair par un nombre pair*:

cette opération donnerait, selon ODON, le même résultat. Contrôlons cette affirmation par quelques exemples "inventés" :

$$3 \times 4 = \text{a) } 2 \times 6$$

mais pour b) et c), la règle n'est pas valable :

$$3 \times 4 = \text{b) } 2 \times 3 \times 3 \ (= 18\ !)$$
$$\text{c) } 3 \times 2 \times 3$$

La leçon des manuscrits serait-elle simplement fautive ? Faudrait-il lire *impar imparem* au lieu de *impar parem* ? Le résultat n'est pas plus probant. Voici, par exemple :

22) Cet exemple – que nous ajoutons par souci de vérification de la règle (il ne figure pas chez ODON) – illustre au mieux les subtilités du procédé.

3 x 5 = a) 2,5 x 6, donc résultat correct.

mais pour b) et c) la règle fait défaut :

b) 2,5 x 3 x 3 (= 22,5 !)

c) 3 x 2,5 x 3

ODON s'est donc un peu trop hâté en affirmant :
"firmum est et nusquam cadit" !

5. *la multiplication d'un nombre pair par un autre nombre, pair ou impair :*

1º *la multiplication d'un nombre pair par un autre nombre pair = la somme de l'addition des nombres pairs et impairs qui entourent le plus grand nombre. La série doit contenir autant de termes que le plus petit nombre a d'unités :*

4 x 8 = 6 + 7 + 9 + 10 (= 32) 23)

2º *la multiplication d'un nombre pair par un nombre impair = le produit de la multiplication, par le plus grand nombre, des parties constitutives du plus petit :*

6 x 7 = (2 x 7) + (4 x 7) (= 42)

(3 x 7) + (3 x 7)

Avouons, pour clore ce chapitre, que c'est plutôt par acquit de conscience que nous avons rendu compte de ces règles minutieuses : elles ne se retrouvent chez aucun autre de nos arithméticiens et elles n'ont même pas été mises à contribution dans l'exégèse d'ODON lui-même. Tout au moins, elles donnent une bonne illustration de l'esprit scrupuleux qui caractérise une grande partie de l'oeuvre d'ODON DE MORIMOND, infatigable dans ses investigations sur les curiosités arithmétiques des nombres et sur leurs mystères symboliques.

---

23) Nous rappelons la règle simplifiée de l'agrégation rapportée par THIBAULT, voir plus haut, p. 26.

D E U X I E M E   P A R T I E

LES SIGNES ET LES PROPRIETES DES NOMBRES [1)]

Si la catégorie *secundum se* se situe en marge des considérations strictement arithmétiques, elle fait appel à certaines connaissances techniques de calcul, notamment au calcul digital.

Mais commençons par cerner ce que nos auteurs [2)] comprennent par cette catégorie.

GEOFFROY D'AUXERRE propose clairement, avec quelques exemples à l'appui, trois subdivisions :

1. *ex aliqua numeratione sollempne*, c'est-à-dire que le nombre tire sa signification des choses qu'il désigne habituellement :

   5 : les cinq livres de la Loi, les cinq sens, etc.

   7 : les sept jours de la semaine, de la Création, les dons de l'Esprit, etc.

   C'est là le procédé "classique", qui n'a rien à faire avec le symbolisme fondé sur l'arithmétique.

2. *ex aliqua proprietate insigni*, c'est-à-dire que le nombre "signifie" à cause d'une propriété arithmétique particulière:

   3 : parce que toute figure se "résoud" dans le triangle

   5 : parce qu'il "revient à lui-même" par multiplication

3. *secundum signa*, allusion au calcul digital où les nombres sont exprimés par les figures formées dans les doigts :

   30 = union conjugale; 60 = pudeur, etc. [3)]

---

1) THIBAULT, II,i-ii; GEOFFROY, *Proemium* 1 et *passim*. Pour HUGUES et ODON, cf. ci-dessous.
2) HUGUES, ODON, GEOFFROY et THIBAULT (GUILLAUME ne définit pas cette catégorie).
3) Pour les exemples de GEOFFROY, cf. plus loin, p. 49, n. 19.

Nous retrouvons chez THIBAULT DE LANGRES [4] cette même division, mais sous une forme soigneusement élaborée et élargie, qu'on peut résumer par le schéma suivant :

1. secundum signa
   - 1º digiti et artus
     - A. secundum modernos
     - B. secundum antiquos
       - secundum ordinem loci
       - secundum quantitatem
       - secundum officium
       - secundum dignitatem
       - secundum inflexionem
       - secundum naturam membri
       - secundum positionem
   - 2º littere
     - 1) a forma
       - a mysterio
       - ab ordine
     - 2) a dictione
2. secundum officium sollempne
   - numerare
   - ordinare
   - formare
3. secundum proprietatem insignem

Quant à ODON DE MORIMOND, il réserve, sous le titre *De figuris numerorum*, les trois subdivisions de sa première *clausula* (en tout 55 chapitres !) [5] à la catégorie des signes qui servent à exprimer les nombres, catégorie qui comprend - comme chez THIBAULT - non seulement les règles du comput digital, mais aussi les valeurs numériques des lettres des alphabets grec et latin.

En ce qui concerne la troisième subdivision de THIBAULT : *secundum proprietatem insignem* (= GEOFFROY : *ex aliqua proprietate insigni*), elle ne figure pas, chez ODON, en tant que catégorie indépendante : elle n'est même pas énumérée parmi ses "huit modes d'interprétation des nombres". [6] Par contre, sous le titre : *de proprietatibus numerorum*, couvrant les trois subdivisions de la seconde *clausula* (en tout 69 chapitres !) [7] de son traité, nous trouvons presque toute la matière répartie, chez THIBAULT, dans les première, troisième et quatrième parties de son opuscule, à savoir :

---

4) II, i-iii.
5) I,I-III, Cf. *Appendice*, III, p.121.Remarquons que, pour THIBAULT, *figura* renvoie à la géométrie : cf. ci-dessous, p. 69.
6) III,I,iii-xii.
7) II,I-III.

I : La génération des nombres : agrégation, multiplication, partition.
III: La composition des nombres : pairs - impairs, figures géométriques.
IV : Les proportions.

Quant à la deuxième subdivision de THIBAULT (*secundum officium sollempne* = GEOFFROY : *ex numeratione sollempni*), nous constatons une autre différence terminologique entre ODON et ses successeurs : ODON traite de cette catégorie sous le titre de *secundum paritatem* [8] (c'est-à-dire, l'analogie entre le nombre et la chose qu'il désigne) et emploie comme synonyme de ce titre, *secundum se* !

Chez HUGUES DE SAINT-VICTOR, on ne trouve pas de catégorie *secundum se*, sauf dans un seul cas : son huitième "mode" (*secundum multitudinem partium*) est indubitablement identique au *secundum paritatem* d'ODON (= *secundum officium sollempne* selon THIBAULT).

Nous venons de le voir : cette vaste matière comporte, d'auteur en auteur, des divisions si disparates qu'il n'est sans doute pas superflu de les récapituler dans un schéma, sans toutefois y introduire leurs multiples subdivisions :

HUGUES		ODON		GEOFFROY		THIBAULT
sec. multitudinem partium	=	*SECUNDUM SE* (*sec. paritatem*)	=	*ex aliqua numeratione sollempne*	=	*secundum officium sollempne*
		de proprietatibus	≠	*ex aliqua proprietate insigni*	=	*secundum proprietatem sollempnem*
		a figuris	≠	*secundum signa*	=	*secundum signa*
				SECUNDUM SE		

8) III,I,iv.

I
LES NOMBRES EXPRIMES PAR LES SIGNES

1. LES SIGNES NOTES DANS LES DOIGTS ET DANS LES ARTICULATIONS [1)]

C'est là le procédé qui consiste à former des figures dans les doigts et dans les articulations pour indiquer les nombres, donc la méthode connue sous le nom de *comput digital* dont les origines se perdent dans la nuit des temps. Malgré les nombreux témoignages de cette tradition, [2)] on ne trouve pas - à une exception près - de véritable manuel de comput digital avant celui de BEDE, inséré dans son *De temporum ratione: de computo vel loquela digitorum.* [3)] Cette méthode essentiellement pratique, [4)] indispensable en tant que "langue internationale" du commerce, aurait été si connue qu'on n'aurait pas senti le besoin, selon QUACQUARELLI, [5)] de faire des traités théoriques sur le comput digital. On pourrait ajouter que l'antique mépris de l'emploi commercial des nombres a dû également jouer un certain rôle. Du domaine commercial, la méthode est passée dans

---

1) THIBAULT, II,i; ODON, I,I,iv ss : explications "techniques"; I,III,ii : applications symboliques; GEOFFROY, *Proemium* , p.4, 10-14.

2) Pour ne nommer, parmi les "anciens", que les latins : PLAUTE, *Miles gloriosus*, II,ii,47; JUVENAL, *Satires* , X,249; APULEE, *Apologia*,89; PLINE, *Historia Nat.* XXXIV,vii,16; SUETONE, *Claudius* , 21; QUINTILIEN, *Inst.* I,10; XI,3; SIDOINE APOLLINAIRE, *Epist.* IX,ix,16; OVIDE, CICERON, SENEQUE, etc... Parmi les Pères, mentionnons surtout JEROME, CASSIODORE, AUGUSTIN, RABAN MAUR, etc... Cf. l'article de QUACQUARELLI, *Ai margini dell'actio : la loquela digitorum...* dans *Vetera christianorum*, 1970, p. 199-224; BECHTEL, *Finger-counting*...dans *Classical Philology*, IV, 1909, p. 25-31; JONES, éd. de BEDE, notes, p. 329; MENNINGER, *Zahlwort und Ziffer* , II, p. 11 ss : *Fingerzahlen im Altertum*, avec citations. Voir en outre, la très substantielle étude de E.ALFÖLDI-ROSENBAUM, *The Finger Calculus in Antiquity and in the Middle Ages* (*Frühmittelalterliche Studien* 5, 1971).

3) Ed. par JONES, Cambridge, Mass., 1943. ODON, I,I,xv, souligne que BEDE n'est pas *inventor*, mais *relator* d'une tradition qui remonte à JEROME, CASSIODORE et d'autres anciens auteurs. Dans le chapitre I,I,iv, ODON parle de cette méthode inventée par des "hommes célèbres pour leur érudition". Selon JONES,*op. cit.* p. 329, note, BEDE dépend d'une version qui se trouve dans les *Pseudepigraphia*, p.106-108.

4) Le calcul sur les doigts est utilisé encore de nos jours sous diverses formes. T. DANTZIG, *Le Nombre, langage de la science*, p.19, rapporte des exemples d'Auvergne.

5) *op.cit.* p. 219; p. 224.

l'enseignement des mathématiques dans les écoles. Il a donc existé, à l'usage des élèves, des manuels scolaires et des planches explicatives. [6] Aussi est-ce un souci de pédagogie qui, au dire d'ODON,[7] est à la base de cette méthode :

- la facilité de compréhension : ce qui est discerné par les yeux et démontré par les doigts, dit ODON, est mieux retenu par la mémoire
- la similitude entre les doigts et les nombres :
  - il y a dix nombres et dix doigts
  - leur puissance est semblable : de même que tout est fait par les nombres, nous nous servons des doigts pour expliquer et effectuer des choses
- la variété des doigts : ils sont tous différents les uns des autres.

ODON consacre la majeure partie de sa première *clausula* à expliquer, d'après BEDE et d'autres sources traditionnelles,[8] les règles classiques du calcul sur les doigts. Après avoir interprété les noms des doigts : *auricularis*, *medicus*, *impudicus*,[9] etc. - nous reviendrons là-dessus dans notre étude sur les procédés d'exégèse - ODON passe en revue les "sièges" (doigts, articulations, membres du corps) dans lesquels se forment les figures des nombres [10] par inclinaison, par érection, extension, conjonction des doigts ou par apposition de toute la main:

Les nombres 1-9 sont formés par l'érection, l'extension ou l'inclinaison de trois doigts dans la main gauche : l'auriculaire, l'annulaire et le majeur.

Les figures de 10-90 et de 100-190 sont exprimées par le pouce et l'index respectivement de la main gauche et de la main droite.

De même, les nombres 10 000 à 90 000 et de 100 000 à 900 000 sont figurés par l'apposition de la main sur différentes parties du

---

6) Un témoignage tardif est donné par STRABON, cité par MENNINGER, *op.cit.* p.18. Cf. aussi ALFÖLDI-ROSENBAUM, *op.cit.* p. 8 et les nombreuses reproductions, d'après des manuscrits et des *tessarae* , de figures digitales. De même, MENNINGER, *op.cit.* II, p. 3-21.

7) I,I,iv-v.

8) ODON, I,I,iv-xvi; BEDE, *op.cit.* (éd. Jones, p. 179-180). Pour la technique même du comput digital, ODON suit BEDE et peut-être aussi RABAN MAUR qui, dans son *Liber de computo*, a inséré un chapitre intitulé : *Quomodo digiti significentur*, *PL*, 107, 673-675.

9) Ce sont là des désignations classiques dont on trouve différentes interprétations. Cf. par exemple celles d'ISIDORE dont les explications d'ODON s'éloignent quelque peu (cf. le texte de l'éd. de THIBAULT, p. 64, n. 4).

10) I,I,viii ss

corps, les premiers par la main gauche placée sur la moitié gauche du corps, les autres par la main droite placée sur la moitié droite. Pour indiquer les millions, on pose les deux mains, les doigts joints, sur la poitrine, le ventre, la hanche, les cuisses.[11)]

Les unités et les milliers sont exprimés par trois doigts : l'auriculaire, l'annulaire, le majeur. Les dizaines et les centaines se forment à l'aide de deux doigts : le pouce et l'index. Avec le souci de perfection qui le caractérise, ODON rend ensuite compte des "digiti" (les nombres 1-9) et des "articuli" (les nombres divisibles par 10), qui sont représentés par la même figure, mais dans des doigts différents.[12)]

Enfin est expliqué - ce qu'omet d'ailleurs BEDE - comment sont annotés les "compositi" [13)] (qui sont un croisement entre les "digiti" et les "articuli"). Ils se distinguent par une double annotation: un signe dans les articulations de la main droite pour la somme la plus élevée, l'autre dans les doigts de la main gauche pour indiquer les unités.

THIBAULT, plus concis qu'ODON, se contente de donner un abrégé succinct des règles du comput digital "classique".[14)] Or BEDE présente également un autre procédé employé spécialement dans le comput ecclésiastique, s'il faut le croire [15)] : THIBAULT appelle cette manière de compter *secundum modernos*. Au lieu de plier ou étendre les doigts, etc. on compte simplement en parcourant les extrémités et les articulations des doigts : l'index touchant la première jointure du pouce = 1, la deuxième = 2, et ainsi de suite, tout comme les enfants, dit THIBAULT, qui solmisent la gamme. [16)] Curieuse allusion à la main "harmonique" ou "musicale", très répandue dans l'enseignement de la musique.[17)]

---

11) Nous renvoyons aux planches et aux reproductions de figures dans les articles cités ci-dessus, n.2 : ALFÖLDI-ROSENBAUM, QUACQUARELLI, BECHTEL, MENNINGER.

12) I,I,ix.

13) La division des nombres en *digiti*, *articuli* (et *compositi*) revèle clairement leur provenance du comput digital.

14) II,i : *Secundum antiquos*.

15) "Est et alterius modi computus, articulatim decurrens, qui... specialiter ad paschae rationem pertinet" (BEDE, *op.cit.* I, éd. Jones, p. 180, 63-64); il explique plus longuement ce procédé dans le chapitre 55 : *De reditu et computo articulari utrarumque epactarum* (éd. Jones, p. 275-276). Selon CORDOLIANI, *Les traités des computs...* dans *Positions des thèses de l'Ec.des Chartes*, 1942, p. 51-55, BEDE est le premier à appliquer le comput digital au comput ecclésiastique.

16) Texte, p.60,6.

17) Voir J. SMITS VAN WAESBERGHE, *Musikerziehung...* Leipzig, 1969 (= *Musikgeschichte* herausgegeben von H. Besseler und W. Bachmann, t. III, 3), planches 57-84 et L.M. de ALBUQUERQUE, *Os Almanaques portugueses de Madrid*, Coïmbre, 1961,

Ces démonstrations n'ont évidemment pas d'autre fonction que de servir de point de départ à de subtiles interprétations symboliques dont les Pères avaient indiqué le chemin. Le symbolisme de la main droite et de la main gauche si répandu au Moyen Age,[18] les doigts considérés par THIBAULT comme autant de marches de l'échelle menant vers les choses célestes (symbolisées par 100, formé dans la main droite), l'exemple bien connu de l'exégèse des nombres contenus dans la parabole du semeur [19] - ces quelques spécimens parmi les plus traditionnels et les plus cités, ne donnent qu'une idée assez vague de l'exégèse symbolique à laquelle se livrent, indépendamment l'un de l'autre, ODON [20] et THIBAULT.[21] Nous reviendrons ultérieurement sur cet aspect , objet primordial de notre intérêt.

2. LES NOMBRES EXPRIMES PAR LES LETTRES [1]

C'est encore BEDE [2] qui sert de point de départ à THIBAULT, mais surtout à ODON, pour la démonstration des valeurs numériques des alphabets grec et latin. Or, tandis que, en passant tout de suite à l'exégèse, THIBAULT présume connus de la part du lecteur les éléments de base, ODON, toujours inquiet de ne pas être assez explicite, [3] se livre à de minutieuses explications qui dépassent de loin les maigres indications de BEDE. S'il recopie, d'après celui-ci, l'alphabet *grec* avec, en regard, la valeur numérique correspon-

---

p. 49, qui reproduit une "main arithmétique". Pour le rapprochement entre la main"arithmétique"et la main "musicale" et leur utilisation dans l'enseignement de l'arithmétique et de la musique, voir G.BEAUJOUAN, *L'Enseignement du "Quadrivium"*, dans *La Scuola nell'Occidente latino dell'alto medioevo*, Spolète, 1972, p. 650-653.

18) Voir texte, p. 65, n.7.

19) JEROME, *Adversus Iovinianum*, *PL*, XXIII, 213 : 30 = l'union conjugale à cause de la figure du comput : cercle formé par l'index et le pouce de la main gauche; 60 = chasteté, pudeur ou répression des désirs. Ces propriétés sont "visualisées" par la figure de l'index posé sur le pouce de la main gauche; 100, enfin = virginité ou couronne des martyrs, parce que, dans le comput digital, ce nombre forme, dans la main droite, un cercle, l'extrémité du pouce reposant dans la première jointure de l'index. - Cf. également GEOFFROY D'AUXERRE, p.4, 10-13.

20) Toute la troisième subdivision de la première *clausula* (I,III,i-xxiv) du traité d'ODON est consacrée au symbolisme des figures du comput digital.

21) THIBAULT, II, i, B; texte, p. 64-67.

1) THIBAULT, II,ii; ODON, I,II,v-xv. Rappelons que HUGUES, GUILLAUME et GEOFFROY passent sous silence ce rapprochement entre lettres et nombres.

2) *De temporum ratione*, I (éd. Jones, p.179; *PL*, 90, 695-696).

3) "Modo que littere quos numeros notent et quare superest aperire ne forte ubi litteras vice posuerimus numerorum laboriosa inquisitione lector exestuet nesciens causam adiectionis" (I,II,v)

dante de chaque lettre, ODON ne se borne pas, comme BEDE et THIBAULT, à indiquer les six "chiffres romains" C D I L V X, [4] mais il dote également chacune des lettres de l'alphabet *latin* d'une valeur numérique propre. Il s'agit donc de deux alphabets numériques tout à fait distincts :

si la lettre A = 1 dans l'alphabet grec, cette même lettre équivaut à 900 dans l'alphabet latin que propose ODON; de même, beta = 2 alors que le B latin = 300, etc.

Aucun problème ne se pose pour les chiffres-lettres bien connus des Grecs ni pour l'emploi, par les Romains, de la combinaison et de la répétition des lettres I V X L C D M pour indiquer les nombres. Or, les choses sont moins simples en ce qui concerne l'alphabet numérique latin : il en a existé plusieurs variantes dont, d'ailleurs, l'origine est mal connue. Selon P.LEJAY, ce serait un souci de simplification qui a présidé à leur création.[5] A la suite de FRIEDLEIN,[6] il a examiné quelques manuscrits du X^{e} au XV^{e} siècle comportant de tels alphabets numériques. De son tableau comparatif ressort que cette tradition a connu certaines fluctuations : si, par exemple, dans des manuscrits du X^{e} et du XIV^{e} siècle, O = LX, dans d'autres documents, de provenances diverses, on attribue à cette même lettre la valeur de XI. [7] Il ne faut donc pas s'étonner si les valeurs numériques indiquées par ODON ne sont pas toujours conformes à ce qu'on peut trouver ailleurs. [8] Le système ne semble pas avoir eu une diffusion suffisante pour se fixer en une "norme". Aussi faut-il renoncer à connaître la source précise d'ODON DE MORIMOND.

ODON [9] et THIBAULT [10] proposent chacun quatre manières selon lesquelles on peut interpréter les lettres. Comme ce procédé appartient surtout au domaine de l'exégèse symbolique, nous nous conten-

---

4) On voit, par l'absence de "M", que la source directe d'ODON est probablement les spéculations des Pères sur le nom de la Bête de l'Apocalypse, interprétée, entre autres comme DIC LUX (cf. THIBAULT, p.71), car BEDE indique bien les sept "chiffres romains".

5) Toute la question a été traitée par P.LEJAY, *Alphabets numériques latins...*, dans *Rev. Philol. littérat. et hist. anc., nouv.sér.* 1898, p. 146-162. Cf. le même, p. 1: "... des tentatives, dont la date est difficile à établir, furent faites pour introduire une simplification par l'emploi de toutes les lettres de l'alphabet".

6) *Die Zahlreichen und das elementare Rechnen...*, 1869, 1968^{2}, p. 20-22.

7) Voir le tableau comparatif, *op.cit.* p. 151-152.

8) G.BEAUJOUAN a relevé ces déviations dans son article, *Le Symbolisme des nombres à l'époque romane* dans *Cahiers de Civilisation Médiévale*, 1961, p.164.

9) I,II,vi.

10) II,i, p. 68-71.

terons, dans ce premier survol, d'en indiquer seulement les grandes lignes.

La valeur numérique ou symbolique des lettres peut être interprêtée selon :

1º *la forme des lettres* : [11]

ODON interprète ainsi toutes les lettres de l'alphabet latin : A (= 900 = 3x300) exprime, par exemple, par sa forme triangulaire, la Trinité. Comme le triangle est la première figure géométrique, A est aussi la première lettre.[12]

THIBAULT traite, sous cette catégorie, d'un seul cas - et des plus connus dans la tradition exégétique : celui de la lettre grecque TAU (= 300) dont la forme en croix a fourni matière aux plus ingénieuses interprétations patristiques.[13]

2º *la place qu'occupe la lettre dans l'alphabet* : [14]

THIBAULT se restreint au seul exemple de l'Alpha, première lettre de l'alphabet et, pour cette raison, symbole de Dieu et de l'unité.

Pour ODON, la lettre E, pour ne prendre qu'un seul exemple, a la valeur numérique de 250 (= 200 + 50) dans l'alphabet latin, parce que E est la *deuxième* voyelle et la *cinquième* lettre de l'alphabet. De plus, 200 = deux fois l'"unité" (100) et 50 est formé par les nombres 2 et 5, puisque $5^2 \times 2 = 50$!

3º *la signification symbolique de certaines lettres* :[15]

ODON s'attache à démontrer, d'après le célèbre exemple d'Augustin, la similitude entre les lettres du nom d'ADAM [16] et les initiales des noms grecs indiquant les quatre directions du monde : Anathole, Disis, Archos, Mesenbrion.

THIBAULT présente le cas non moins connu de la lettre Y (=400) "lettre de Pythagore", symbole du choix qu'il faut faire entre

11) ODON, I,II,vi : *secundum formationem figure*; THIBAULT, II,i, p. 68 : *a forma*.
12) I,II,vii. Cf. ci-dessus, paragraphe 2.
13) Cf. le texte de THIBAULT, p. 68, les notes 1 et 4. Nous reviendrons sur ces interprétations.
14) ODON, I,II,vi : *secundum positionem loci*; THIBAULT, II,i,p. 70 : *ab ordine littere*.
15) ODON,I, II, vi : *secundum similitudinem principii* ; THIBAULT, II,i, p. 69 : *a mysterio littere*.
16) I,II, xiii. Nous traiterons également plus tard la valeur symbolique et gématrique de ce nom qui a joué le grand rôle que l'on sait dans la typologie et l'exégèse du Moyen Age.

le bien et le mal [17] et, par là, image de la fragilité de la vie humaine.

4º *la valeur gématrique des lettres* : [18]
c'est-à-dire l'égalité numérique entre la somme des lettres d'un mot et un nombre.

THIBAULT exploite encore une fois, sur les traces d'Augustin, le nom d'ADAM (=46) selon la valeur des lettres grecques.

L'énigmatique nombre de la Bête (*Apoc.* XIII,18) n'est pas non plus oublié :
ODON rapporte les déchiffrements traditionnels du nombre 666 selon les lettres grecques :
ANTHEMOS, APONCYME, TEYTAN ou GENSHERICOS,[19] alors que THIBAULT suit la tradition de BEDE en appliquant le nombre de la Bête aux lettres latines :
DCLXVI = DIC LUX.[20]
C'est la seule fois que THIBAULT a recours à l'alphabet latin.

Nous verrons ultérieurement comment ODON met à contribution toutes les voyelles et toutes les consonnes de l'alphabet latin pour les interpréter, une à une, selon les procédés décrits ci-dessus. Il fait même des incursions dans l'alphabet hébreu.

---

17) Voir la note 7, p. 69 du texte de Thibault.

18) ODON, I,II,xi : *secundum similitudinem significationis*; THIBAULT, II,I,p.70: *a dictione* : *De numero nominis ADAM et de nomine Antichristi.*
Sur les procédés gématriques, sur lesquelles nous reviendrons plus longuement, voir entre autres : F.DORNSEIFF, *Das Alphabet in Mystik und Magie*, Berlin, 1925, p. 91-118; B.TAEGER, *Zahlensymbolik bei Hraban, bei Hincmar und im "Heliand"* ? ... Munich, 1970, p. 19; E. HELLGARDT, *Zum Problem symbolbestimmter und formalästhetischer Zahlenkomposition...*, Munich, 1973, p. 150-153; M.-D. CHENU, *La Théologie au XII^{e} siècle* , p. 164; J.A.SANCHEZ PEREZ, *La aritmetica en Grecia*, Madrid, 1947, p. 154.

19) Cf. la note 5, p. 71 du texte de THIBAULT.

20) Cf. le texte de THIBAULT, p. 71, n.5. Cf. aussi PH.DELHAYE, *Godefroy de Saint Victor*, I, p. 144 ss, dans lequel on trouvera beaucoup de renvois à d'autres auteurs, entre autres à RUPERT TUY et BEDE. Voir de même DORNSEIFF, *op.cit.* p. 106 ss.

II

LES FONCTIONS DU NOMBRE [1]

THIBAULT envisage la fonction "habituelle et solennelle" [2] du nombre selon qu'il sert à "énumérer", à "ordonner" ou à "former" :[3]

1º La première fonction (*numerare*) est le mode le plus utilisé - et le plus banal - de la tradition exégétique des nombres.[4] Il consiste à établir la signification d'après la concordance entre les unités dont se compose un nombre et celles contenues dans les choses que ce nombre désigne "habituellement" :

1 = Dieu, le baptême, la foi, etc.

3 = les vertus théologales, la Trinité, les puissances de l'âme, etc.

2º La deuxième fonction (*ordinare*) concerne la signification des nombres ordinaux, les *dispositiva* :

13 = nombre théophanique, parce que l'Epiphanie tombe sur le treizième jour après Noël, etc.

3º Pour la troisième fonction du nombre (*formare*), THIBAULT entre dans le domaine du comput ecclésiastique :

8 : nombre d'or, par lequel, dans les calendriers de l'Eglise, on trouve la date des fêtes mobiles

11 : nombre des épactes, [5] correspond à la transgression des dix commandements.

---

1) THIBAULT, II,ii, p. 72-74: *De sollempne officio.*

2) Ne faut-il pas comprendre *sollempne* dans le double sens de "solennel" et "habituel", puisqu'il s'agit des significations *habituelles* des nombres *bibliques* ?

3) *Numerare, ordinare, formare.*

4) Cf. HUGUES DE SAINT-VICTOR, *De script. et script. sacris : secundum multitudinem partium* (*Appendice*, p.85); ODON, *Proemium* , I,I,v; III,I,iv : *secundum paritatem* ("cum res numeris et numeri congruunt rebus"); GEOFFROY, *Proemium* , p. 4, 3-5 : *ex aliqua numeratione sollempni.* - Pour la tradition de ce mode d'interprétation, nous renvoyons à notre chapitre *Les grands jalons de la spéculation des nombres* (à paraître).

5) Cf. le texte de THIBAULT, p. 74, n. 18.

On le voit, mise à part cette dernière allusion de THIBAULT au calcul technique du comput ecclésiastique, ce paragraphe se range entièrement sous la rubrique : interprétation symbolique. Nous aurons donc l'occasion de l'approcher sous un autre angle de vue.

III

LES PROPRIETES PARTICULIERES DES NOMBRES [1]

Si la catégorie *De sollempni officio* considère la correspondance entre les unités des nombres et des choses, il s'agit, dans la catégorie *De proprietate*, d'établir une analogie entre certaines propriétés des nombres et des choses qu'ils symbolisent : à une qualité arithmétique ou géométrique du nombre correspond une qualité intrinsèque de la chose :

5 parce qu'il est "circulaire" - c'est-à-dire que multiplié par les nombres impairs, il "revient" toujours à lui-même [2] - symbolise le monde qui tourne;

7 qui *intra denarium nec generat nec generatur*, est attribué au Saint-Esprit qui n'est engendré ni n'engendre;

1 symbolise Dieu, parce que leurs propriétés immanentes sont l'unicité, le pouvoir créateur, leur omniprésence dans ce qu'ils ont créé (respectivement les choses et les autres nombres), ils sont leur propre racine,[3]

etc.

C'est également là un procédé très fréquent dans la tradition symbolique dont nous traiterons en détail ailleurs.

---

1) THIBAULT, III, iii : *De proprietate* ; GEOFFROY, *Proemium* : *ex aliqua proprietate insigni*; ODON, comme nous l'avons déjà mentionné, ne range pas explicitement cette catégorie parmi ses huit "modes" d'interprétation des nombres. Par contre, il expose les propriétés des nombres dans II,I-III et donne, dans ses traités sur les nombres 1 et 2, une démonstration du principe que GEOFFROY et THIBAULT généralisent en l'appliquant à d'autres chiffres.

2) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II, 30 (éd. Friedlein, p. 121,7 ss) : *De circularibus vel sphericis numeris.*

3) THIBAULT, III,iii. Cf. ODON, III,II,vi.

TROISIEME PARTIE

LA COMPOSITION DES NOMBRES

THIBAULT range, sous ce titre, plusieurs catégories que nous trouvons réparties ailleurs,souvent sous d'autres titres, chez ses prédécesseurs :

I : les nombres pairs et impairs
II : les parties constitutives du nombre
III : les nombres figurés :
1. linéaires, superficiels, solides
2. triangles, carrés, polygones

I

LES PAIRS ET LES IMPAIRS [1)]

La classification des nombres en pairs et impairs fait sans doute partie de l'héritage le plus ancien de l'arithmétique : depuis les Pythagoriciens, nous voyons toujours répéter la même définition: "Omnis numerus aut par aut impar est". [2)]

---

1) THIBAULT, III, i; ODON, II,II,ii; GUILLAUME, *Regule*, II (*Appendice* II,p.96). GEOFFROY n'en parle pas. HUGUES range la division en pairs et impairs sous la rubrique *secundum compositionem*.

2) BOECE traite des pairs et impairs avec leurs subdivisions dans *Inst.Arithm.* I, 3-9; CASSIODORE, *Inst.* II,4 (*De arithm.* 3 ss) et ISIDORE, *Etym.* III, 5 ss (*De arithm.*) donnent de ces catégories des exposés clairs et succincts. Cf. aussi MARTIANUS CAPELLA, *De Nuptiis*... VII,748 : "Omnis vero numerus aut par aut impar est..." (éd. Dick, p. 379,3); BOECE, *Inst.Arithm.* I, 3 et 5 :"Definitio et divisio numeri et definitio paris et imparis." "Alia secundum antiquiorem modum divisio paris et inparis" (éd. Friedlein, p. 13 et p. 14).

Le nombre pair est celui qui se divise en deux parties égales, sans intercalation de l'unité; le nombre impair celui qui se divise en deux parties inégales, selon une des définitions de BOECE. [3]

ODON fait sienne cette formule,[4] alors que THIBAULT ne s'attarde pas à des définitions par trop connues, mais passe immédiatement à la théorie pythagoricienne - transmise par MARTIANUS CAPELLA et MACROBE - sur le "sexe des nombres" : les nombres pairs, étant divisibles, donc fragiles, sont "féminins"; les nombres impairs - toujours tenus en haute estime - sont "masculins". [5]

GUILLAUME D'AUBERIVE ajoute à sa définition :[6] "...quaternarius primus par est; ternarius primus impar est", révélant par là sa dette à lui aussi envers les Pythagoriciens, qui plaçaient l'unité et la dyade en dehors de la série des nombres entiers, donc au-dessus de toute parité et imparité. Aussi NICOMAQUE définit-il le pair de la manière suivante : "ce qui peut être divisé à la fois en parties égales et en parties inégales", excluant ainsi le nombre 2. De même, l'impair est "ce qui ne peut être divisé qu'en parties inégales", définition qui ne s'applique donc pas au nombre 1.[7] BOECE reprend cette idée dans son chapitre intitulé : "Alia (definitio) secundum antiquiorem modum divisio paris et imparis". [8] La notion de l'unité comme principe, "mère" des nombres, a joué le grand rôle que l'on sait dans l'arithmologie et l'exégèse, par l'analogie faite entre l'Unité et le Créateur, entre les nombres engendrés et les choses créées. Ces spéculations philosophiques - un des aspects les plus fascinants de l'histoire des nombres - seront reprises plus tard dans notre travail.

---

3) *Inst.Arithm.* I,3 : "Et par quidem est, qui potest in equalia duo dividi, uno medio non intercedente, inpar vero, quem nullus in aequalia dividit eo, quod in medio praedictus unus intercedat" (éd. Friedlein, p. 13, 12-15). De même, MARTIANUS CAPELLA, *De Nuptiis*... VII, 748 : "Omnis vero numerus aut par aut impar est. Par est, qui in duas aequas partes dividitur, ut II. III. VI; impar est qui in duas aequas partes dividi non potest, ut III. V. VII..." (éd. Dick, p. 379, 3-6); CASSIODORE, *De Arithm.* (*PL* 70, 1205).

4) ODON, II,II,ii : "Par numerus est qui in duas equales partes dividitur; impar numerus est qui in duas inequales partes absolvitur, vel qui in duas equales partes unitatis non scinditur interventu".

5) THIBAULT, p. 80 ss.

6) *Regule* (*Appendice* ,II, p.96) : "Par vero est cuius binarium medium tenet..., impar numerus est cuius unus medietas est".

7) Cf. P.-H. MICHEL, *op.cit.* p. 332.

8) *Inst.Arithm.* I,5 (éd. Friedlein, p. 14,2o ss):"Par numerus est, qui in duo aequalia etin duo inaequalia partitionem recipit..."; *ib.* p. 15,12 ss : "Inpar vero numerus est, qui ad quamlibet illam divisionem per inaequalia semper dividitur...".

I. LA CLASSIFICATION DES PAIRS

Les pairs se divisent, toujours d'après BOECE,[9] en trois classes : les pairement pairs, les impairement pairs, les pairement impairs.

1. LES PAIREMENT PAIRS (PARITER PARES),[10]

divisés toujours par 2, aboutissent finalement à l'unité,[11] ou, exprimé différemment : contiennent, à part l'unité, deux moitiés paires, comme par exemple 8. Il s'agit donc de nombres composant une progression géométrique : 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64, etc.

GEOFFROY et THIBAULT mentionnent et définissent les pairement pairs - qui entrent dans la construction des nombres parfaits - dans leur chapitre sur "la création des *perfecti*",[12] mais ils passent sous silence les deux autres espèces des nombres pairs : les pairement impairs et les impairement pairs.

ODON ne mentionne aucune de ces trois classes. C'est chez le seul GUILLAUME D'AUBERIVE, dans ses *Regule* , que nous trouvons clairement définies et exposées ces trois catégories boétiennes.

2. LES IMPAIREMENT PAIRS (IMPARITER PARES) [13]

se divisent par 2 en parties égales comme les pairement pairs, mais aboutissent, en dernier lieu, non à l'unité, mais à un nombre impair : [14] 12 - 6 - 3.

Ils sont le produit de :

---

9) *Inst.Arithm.* I,8.
10) *Inst.Arithm.* I,9 (éd. Friedlein, p. 17 ss).
11) *Inst.Arithm.* I,9, p. 17, 9-13 : "Pariter par numerus est, qui potest in duo paria dividi, eiusque pars in alia duo paria partisque pars in alia duo paria, ut hoc totiens fiat, usquedum divisio partium ad indivisibilem naturaliter perveniat unitatem".
12) GEOFFROY, *De perfectione numerorum*, p. 23,1-4; THIBAULT, p. 47,1-11 : "...quorum maior medietas recto tramite per duplicationem ab unitate procedit... usque ad unitatem parili divisione descendentes, sine alicuius imparitatis occursus". Cf. GUILLAUME D'AUBERIVE, *Regule* , III (*Appendice*, II, p.98) : "Pariter par numerus est cuius divisio partium equaliter per duo paria usque ad insecabilem propeditur unitatem : I. II. IIII. VIII. XVI. XXXII. LXIIII. CXXVIII".
13) BOECE, *Inst.Arithm.* I,13 (éd. Friedlein, p. 25 ss).
14) BOECE, *Inst.Arithm.* I,11 (éd. Friedlein, p. 25, 8-12) : "Hic autem talis est, qui dividitur in aequas partes, cuiusque pars in alia aequas dividi potest, etiam aliquando partes partium dividuntur, sed non usque ad unitatem progreditur aequalis illa disiunctio, ut sunt XXIIII et XXVIII...".
GUILLAUME, *Regule*, III (*Appendice*, II, p.98) : "Impariter par numerus est, qui in partes equas dividitur, que rursus in equales partes dividi possunt, sed non usque ad unitatem sectio illa progreditur".

1º *la multiplication des nombres impairs et les nombres pairement pairs* :[15)]

impairs :	3	5	7	9	11	
pairement pairs :	4	8	16	32	64	
impairement pairs :	3 x 4	5 x 8	7 x 16	9 x 32	11 x 64	etc.

2º *l'addition des impairs* :[16)]

5 + 7 = 12; 9 + 11 = 20; 13 + 15 = 28; 17 + 19 = 36, etc.

3. LES PAIREMENT IMPAIRS (PARITER IMPARES):[17)]

sont les nombres qui donnent un impair à la première dimidation. Seul GUILLAUME, parmi nos théoriciens, en tient compte.[18)]

II LA CLASSIFICATION DES NOMBRES IMPAIRS.

Les nombres impairs sont divisés en : nombres premiers et nombres composés :

1. LES NOMBRES PREMIERS ABSOLUS (PRIMI ET INCOMPOSITI)[19)] sont indivisibles, sauf par l'unité et par eux-mêmes :

5, 7, 11, 13, 17, etc.

2. LES NOMBRES COMPOSES (SECUNDI ET COMPOSITI)[20)] sont divisibles par d'autres chiffres :

9, 15, etc.

Si les nombres composés n'ont aucun facteur en commun en dehors

---

15) BOECE, *Inst. Arithm.* I,11, p. 26, 14 ss; GUILLAUME D'AUBERIVE, *Regule*, (*Appendice*, II, p.99);

16) Cette règle se trouve chez GUILLAUME, *Regule*, IX (*Appendice*, II,p.105). Nous ne l'avons pas trouvée chez BOECE.

17) BOECE, *Inst.Arithm.* I,10, p. 21,24 ss : "Pariter autem inpar numerus est, qui et ipse quidem paritatis naturam substantiamque sortitus est, sed in contraria divisione naturae numeri pariter paris obponitur. Docebitur namque, quam longe hic dissimili ratione dividatur. Nam quoniam par est, in partes aequales recipit sectionem, partes vero eius mox indivisibiles atque insecabiles permanebunt, ut sunt VI. X. XIIII. XVIII. XXII. et his similes".

18) *Regule*, III (*Appendice* , II, p. 98) : "Pariter impar vero numerus est, qui cum et ipse in partes equales dividatur, mox insecabiles permanent partes eius, quem binarius quemlibet imparium multiplicans creat ut bis ter, bis quinque, et nascuntur ex his sex, decem".

19) BOECE, *Inst.Arithm.* I,14; CASSIODORE, *Inst.* II,iv,3; ISIDORE, *Etym.* III,5. Parmi nos auteurs, seul GUILLAUME D'AUBERIVE définit cette classe : *Regule*, II (*Appendice*, II, p.96).

20) BOECE, *Inst.Arithm.* I,15; GUILLAUME, *Regule*, II (*Appendice*, II, p.97). Ces *compositi* n'ont évidemment rien à faire avec ceux du comput digital (cf. plus haut, p.48).

de l'unité,[21] ils sont "premiers entre eux" [22] comme par exemple 9 et 25; sinon, ils sont "composés entre eux" [23] comme 9 et 18.

GUILLAUME ajoute à ces données quelques règles sur les impairs. D'abord, il extrait du long chapitre de BOECE sur la construction des nombres premiers(selon le "crible d'ERATOSTHENE")[24] et la création des nombres composés,[25] une règle concernant ces derniers :[26]

en multipliant entre eux les nombres impairs, disposés selon l'ordre naturel depuis 3 en une progression de raison 2, on obtiendra des nombres composés :

$3 \times 5 = 15; \quad 5 \times 7 = 35; \quad 7 \times 9 = 63$, etc.

Ensuite, il expose les règles pour trouver les produits des nombres impairs : [27]

a) on obtient les produits du premier nombre impair, 3, en ajoutant $2 + 1$ à 3, puis au nombre :
$2 + 1 + 3 = \underline{6} + 2 + 1 = \underline{9} + 2 + 1 = 12$, etc.

b) on obtient les produits du deuxième nombre impair, 5, en ajoutant $4 + 1$ à 5, puis au nombre :
$4 + 1 + 5 = 10 + 4 + 1 = 15 + 4 + 1 = 20$, etc.

c) on obtient les produits du troisième nombre impair, 7, en l'additionnant avec $6 + 1$:
$6 + 1 + 7 = 14 + 6 + 1 = 21 + 6 + 1 = 28$, etc.

On voit à quelles évidences banales peuvent mener les subtilités qui n'en sont pas !

Ce qui est propre aux nombres impairs, souligne GUILLAUME,[28] c'est qu'ils sont ou premiers ou déficients, par exemple :

7 est indivisible, donc il est premier.

Les impairs non premiers sont déficients, par exemple : 9, 15, 75 :

$s^9 = 4; \quad s^{15} = 9; \quad s^{75} = 48$, etc.

---

21) GUILLAUME, *Regule*, II (*Appendice*, II, p.97).

22) THEON, *Exp.* I,7, cité par P.-H.MICHEL, *op.cit.* p. 331. BOECE, *Inst.Arithm.* I,xvi : "...per se secundus et compositus..., ad alium primus et incompositus". NICOMAQUE les appelle "relativement premiers".

23) Cf. P.-H.MICHEL, *op.cit.* p. 331 et BOECE, *Inst.Arithm.* I, 15.

24) BOECE, *Inst.Arithm.* I, 17, p. 33, 20-21.

25) *Inst.Arithm.* I, 17 : "De primi et incompositi et secundi et compositi et ad se quidem secundi et compositi, ad alterum vero primi et incompositi procreatione".

26) *Regule* , II (*Appendice* , II, p.97) : *generatio*.

27) *ib.* II (*Appendice*, II, p.98). Nous n'avons pas trouvé cette règle chez BOECE.

28) *Regule* , IV (*Appendice*, II, p.101): "Itaque impares numeri naturaliter omnes immuniti sunt, vel incompositi".

II
LES PARTIES CONSTITUTIVES DU NOMBRE [1)]

La définition que donne THIBAULT DE LANGRES des parties constitutives du nombre [2)] est incomplète : c'est par les exemples qu'il nous propose de ce "mode de signification" que nous comprenons qu'il s'agit de l'addition de *deux* termes - et pas davantage - contenus dans le nombre :

16 (sex-decim), par exemple, = 6 + 10 (travail + dénier).

Par cette acception étroite du terme, THIBAULT se sépare d'ODON et de GEOFFROY, pour lesquels les *partes* désignent à la fois les éléments d'addition et les facteurs - c'est au moins ce qui ressort de leurs exemples. En fait, cette divergence terminologique est plutôt une question de répartition de la matière : dans son chapitre sur la multiplication, [3)] THIBAULT a déjà souligné l'importance des facteurs (*a multiplicante, a multiplicato*) pour le sens symbolique du produit, alors que cet aspect ne retenait pas l'attention de ses aînés.

Arithmétiquement, rien de plus simple que l'utilisation des parties constitutives dans l'interprétation symbolique des nombres. Cueillons-en - toujours provisoirement - quelques exemples chez ODON et GEOFFROY pour montrer l'extensibilité de la méthode, une des plus employées dans l'exégèse :

ODON envisage le cas de :

1º *deux parties*, qui, réunies, confèrent la signification au nombre total :

10 (= 2 x 5) = la perfection de la vie spirituelle, car 2 = l'âme (c'est la notion théologique de l'image et de la ressemblance); 5 = le corps (les cinq sens).

---

1) THIBAULT, III,ii, p. 87-89 : *Que sint partes constitutive*; HUGUES : *Secundum multiplicationem*; ODON, III,I,v : *Secundum partes*; *id.* III,I,vi : *a parte una*; *id.* III,I,viii : *per progressionem*; GEOFFROY : *secundum compositionem*.

2) "Constitutive dicuntur partes que suo conventu tocius summam constituunt, ut constitutive partes ternarii sunt unitas et binarius."

3) Cf. plus haut, p.37-38.

GEOFFROY présente pas moins de quatre "compositiones" du nombre 15 : [4)]

a) 3 x 5 : celui qui veut monter les 15 degrés du Temple doit suivre la loi (=le Pentateuque) en action, en parole, en pensée (3) et garder dans son coeur la "trinité de la foi".

b) 10 + 5 : l'observation de la loi (5) donne le dénier de la récompense.

c) 1+2+3+4+5 : 15 "enchaîne"(*aggregat*) la sensualité (les 5 sens); il la triple (3 x 5) pour qu'elle ne soit pas excessive; il lui ajoute 10 (5 + 10) pour que la sensualité soit soumise à la foi et à l'obéissance des commandements.

d) 7 + 8 : la double promesse de grâce (7) et de gloire (8 = résurrection).

ODON envisage également le cas de

2º *une partie* de laquelle le nombre extrait sa signification :

49 = 7 x 7 = la sanctification (7) de la grâce (7).

9 = 3 x 3 = la vertu, à cause des 3 espèces :

foi - espérance - charité ou bonté - discipline - science

Ces nombres ne sont donc autres que les carrés dont il sera question dans le paragraphe suivant.

ODON propose encore d'étudier la signification selon :

3º *la progression* , où c'est la qualité des termes de la série qui fait valoir la somme ou le produit. Ainsi :

8 qui se compose des deux impairs 3 et 5 [5)]

16 qui est le carré de 4 [6)]

30 qui est la somme d'une progression des nombres pairs de la première décade : [7)] 2+4+6+8+10 = 30.

etc.

---

4) Texte p. 9-10; cf. p. 10, n. 13.
5) Cf. l'agrégation interscalaire, plus haut, p. 20.
6) Cf. la multiplication, plus haut, p. 37 et les nombres carrés, p. 63.
7) Cf. l'agrégation interscalaire.

THIBAULT DE LANGRES finit son chapitre sur les parties constitutives du nombre par une

REGLE SUR LES PAIRS ET LES IMPAIRS : [8)]

Le nombre *pair* [9)] se compose d'autant d'"articulations" (*compages*) que sa moitié contient d'unités :

4 = 1+3 ou 2+2 : il contient donc deux "couples" (*iuncture*) qui correspondent aux deux unités de la moitié de 4.

Si le nombre est *impair*, il a autant de parties constitutives que sa plus petite moitié contient d'unités :

7 = 1+6 ou 2+5 ou 3+4 : il contient donc trois "couples" tout comme il y a trois unités dans la plus petite moitié de 7.

---

8) III,ii, p. 89.
9) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* I, 3-6 sur la division du nombre pair. La constatation suivante de notre auteur - à savoir qu'un nombre pair a autant d'"articulations" que sa moitié a d'unités - ne provient pourtant pas de BOECE.

III

LES NOMBRES FIGURES [1)]

Avec les nombres figurés, nous baignons de nouveau en plein pythagorisme : les noms mêmes des figures (linéaires, solides, triangles, etc.) sont des vestiges de la conception pythagoricienne du nombre en tant qu'être géométrique représenté par des points ou des lignes. [2)]

I. LINEAIRES, SUPERFICIELS, SOLIDES (OU NOMBRES-PRODUITS)

1º *les nombres linéaires*, [3)] sont les nombres qui n'ont qu'une seule dimension, tels tous les nombres premiers, qui n'ont d'autre facteur que l'unité . On les figure par la ligne :

. . . .   (= 7)

2º *les nombres superficiels* (ou *plans*) [4)] sont les nombres de surface, à deux dimensions, et qui sont figurés par une rectangle qui peut être un carré, un "parte altera longior" ou "parte ante longior" :

---

1) CHALCIDIUS, *Tim.* I,viii ss; MACROBE, *In Somn.Sc.* V,5; BOECE, *Inst.Arithm.* II,5 ss; THIBAULT, III,iii; ODON, II,II,v,vii,xii; GUILLAUME D'AUBERIVE, *Regule* , III (*Appendice* , II, p.99).

2) Nous renvoyons entre autres aux études sur les nombres figurés de P.-H.MICHEL, *op.cit.* p. 295 ss et à l'article du même auteur : *Les nombres figurés dans l'arithmétique pythagoricienne*, Alençon, 1958; DICKSON, *Theory of Numbers*, p.1 ss; KARPINSKI dans *Nichomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic* (translated into English by M.L.D'OOGE; with Studies in Greek Arithmetic by F.E.ROBBINS and L.C. KARPINSKI), p.120-122; 239-240.

3) Cf.BOECE, *Inst.Arithm.* II, surtout 5 (éd. Friedlein, p. 6-17) et *ib.* II,4 (p.88, 15) : *linea = longitudo*. THIBAULT, III,iii, p.90; ODON, II,II,v; GUILLAUME, *Regule*, III (*Appendice*, II, p.99).

4) Cf.BOECE, *Inst.Arithm.* II,4 (éd. Friedlein, p. 88, 15) : *superficies = longitudo et latitudo*. THIBAULT, III,iii, p. 90; ODON, II,II,ix appelle le nombre plan "*pariter geminus*" ou "*geminus equalis*"; GUILLAUME,*Regule*,III (*Appendice*, II, p. 99) : "... numerus in latitudine consideratur... Superficies verò duobus intervallis disparatur : longitudinis et latitudinis. In longitudine ante et retro, in latitudine dextra et sinistra tenditur intervallum".

a) carré (*quadratus, equilaterus, tetragonus*) : [5)]

· ·
· · (2 x 4)

· · ·
· · · (3 x 3) [6)]
· · ·

b) *parte altera longior* :

· · ·
· · · (2 x 3)

c'est-à-dire un rectangle dont un côté dépasse d'une unité l'autre côté. [7)]

GUILLAUME D'AUBERIVE indique deux manières de construire les *parte altera longiores* : [8)]

- par addition des nombres pairs :

2 + 4 = 6, le premier nombre *parte altera longior*
2 + 4 + 6 = 12, le deuxième nombre *parte altera longior*
2 + 4 + 6 + 8 = 20, le troisième nombre *parte altera longior*
etc.

- par la multiplication, dans une progression de raison 1, d'un nombre avec celui qui le précède immédiatement :

2 x 3 = le premier nombre *parte altera longior*
3 x 4 = le deuxième nombre *parte altera longior*
4 x 5 = le troisième nombre *altera parte longior*
etc.

C'est la méthode qu'expose BOECE. [9)]

c) *parte ante longior* : [10)]

· · · ·
· · · · (2 x 4)

est un rectangle dont un côté dépasse l'autre de plusieurs unités.

---

5) Cf. la définition de BOECE, *Inst.Arithm.* I,27 : "Tetragonus autem dicitur, ut brevissime dicam, quod post latius explicabitur, quem duo aequales numeri multiplicant, ut in hac quoque descriptione est" (éd. Friedlein, p. 56,1-3).

6) Le carré se fait, selon ODON, II,I,vii, par une *simplex reflexio* (cf. ci-dessus, p. 40). THIBAULT a traité des carrés dans son chapitre sur la multiplication (voir ci-dessus, p.37 et ODON, II,II,vii-viii).

7) BOECE, *Inst.Arithm.* II,26 : "... parte altera longior est numerus, quem si in latitudinem describas et ipse quidem quatuor venit laterum et quatuor angulorum, sed non cunctis aequalibus, sed semper minus uno..." (éd. Friedlein, p. 115, lo ss) et *ib.* p. 116 :

I x II x III x IIII x V x VI x VII
II VI XII XX XXX XLII etc.

Cf. THIBAULT, III,iii, p. 90.

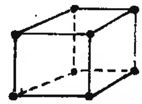
8) *Regule* , X (*Appendice*, II, p.106). Cf. aussi plus haut, p. 38.

9, voir note 7.

10) Cf. la définition de BOECE, *Inst.Arithm.* II,27 : "...sin vero aliquo numero, ut ter VII. vel ter V. vel aliquo modo alio, et non vocabitur hic numerus par-

3º <u>*les nombres solides*</u> , [11] à trois dimensions, sont

a) les cubes (*cubi* ou *tessare*), [12] qui comportent trois dimensions égales :



(2 x 2 x 2) [13]

GUILLAUME indique deux manières pour construire des cubes : [14]

- le cube se fait en multipliant n'importe quel nombre carré par son côte :

le côté de 4 = 2; 2 x 4 (=2 x 2 x 2) = 8

le côté de 9 = 3; 3 x 9 (=3 x 3 x 3) = 27

- le cube peut également être construit à partir des nombres impairs :

3+5 = 8; 7+9+11 = 27; 13+15+17+19 = 64

Les nombres impairs servent également à la construction des *impariter pares* : [15]

5+7 = 12; 9+11 = 20; 13+15 = 28; 17+19 = 36, etc.

b) les *scaleni* (ou *gradati* ou *cunei* ou *spheniscos*) [16] dont les trois facteurs sont inégaux :

---

te altera longior, sed antelongior" (éd. Friedlein, p. 116, 20-22); ODON, II, II, vii-viii; GUILLAUME, *Regule*, III (*Appendice* , II, p.100); THIBAULT, III, iii, p. 90.

11) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II,4 : "Est enim in longitudine ante et retro, in latitudine sinistra et dextera, in altitudine sursum et deorsum. Necesse est autem, ut quicquid fuerit solidum corpus, hoc habeat longitudinem latitudinemque et altitudinem, et quicquid haec tria in se continet, illud suo nomine solidum vocetur" (éd. Friedlein, p. 88,26 ss); THIBAULT, II,iii, p. 90; ODON, II, II,vii-viii; GUILLAUME *Regule*, III (*Appendice*, II, p. 99) : "Solidus numerus consideratur in profunditate, sursum et deorsum".

12) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II,25 (éd. Friedlein, p. 111,14 - p. 113,19) et sa définition (II,29) : "...cybi vero, qui ex aequalibus aequaliter per aequalia producti sunt" (p. 121, 5-6); THIBAULT, III,iii, p. 90-91; ODON, II,II,vii-viii; GUILLAUME, *Regule* , III (*Appendice*, II, p.100).

13) C'est qu'ODON appelle formation par *reflexio coniuncta*, II,I,vii. Cf. ci-dessus, p. 40.

14) *Regule*, IX (*Appendice*, II, p.105).

15) *Ib.* (*Appendice*, II, p.105)

16) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II,25 : "Hi autem sunt, ut si quis faciat bis tres quater... quae per inaequales spatiorum gradus inaequaliter provehuntur. Haec autem forma graeco nomine scalenos vocetur. Nos vero gradatum possumus dicere, quod a minore modo velut gradibus crescat ad maius. Vocant autem eandem figuram Graeci quidam spheniscon; nos autem cuneum possumus dicere. Etenim quod ad quamlibet illam rem constringendam cuneos formant neque latitudinis neque longitudinis neque altitudinis habita ratione, quantum commodum fuerit, tantum

3 x 4 x 5 [17]

c) les *asseres* [18] dont la longueur et la latitude sont égales et la hauteur plus grande d'une unité :

2 x 2 x 3

d) les *laterculi* [19] dont la longueur et la latitude sont égales et la hauteur moins grande d'une unité :

3 x 3 x 2

Parmi les cubes, certains sont appelés "cycliques" ou "sphériques"[20] parce que, multipliés par leur racine, ils reviennent toujours au même chiffre final :

5 x 5 = 25 x 5 = 125 x 5 = 625, etc.

6 x 6 = 36 x 6 = 216 x 6 = 1296, etc.

--

Tous ces nombres : carrés, rectangles, cubes, etc. ont ceci en commun qu'ils proviennent d'une multiplication. Aussi les appelle-t-on, dans la terminologie moderne, des"nombres-produits".[21] Un nombre produit peut pourtant être en même temps "somme" (provenant de l'addition de nombres entiers à partir de l'unité). Ainsi le nombre 6, par exemple, peut-il être figuré de différentes manières selon qu'il est considéré comme nombre-produit ou comme nombre-somme :

```
. . .                     .
        (2 x 3)          . .     (1+2+3) 22)
. . .                   . . .
```

---

vel altitudini minuitur, vel crassitudini profunditatis augetur" (éd. Friedlein, p. 114, 2-14). Cf. THIBAULT, III,iii, p. 90,10-11; ODON, II,II,vii-viii; GUILLAUME, III (*Appendice*,II,p.100).

17)C'est la formation du nombre solide selon le procédé qu'ODON appelle *directio se amoto* (cf. plus haut, p. 40).

18)Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II,29 : "Asseres vero et ipsae quidem figurae sunt solidae, sed hoc modo, ut ex aequalibus aequaliter ducantur in maius" (éd. Friedlein, p. 120, 20-22); THIBAULT, III,iii, p. 90,11-13; ODON, II,II,vii-viii; GUILLAUME, *Regule*, III (*Appendice*, II, p.100).

19)Cf.BOECE, *Inst.Arithm.* II,29 : "Laterculi sunt, qui fiunt ex aequalibus aequaliter in minus" (éd. Friedlein, p. 120, 19-20); THIBAULT, III,iii, p. 90,13-14; ODON, II,II,vii-viii; GUILLAUME, *Regule* , III (*Appendice*, II, p.100).

20)Cf. BOECE,*Inst.Arithm.* II,30 : "Hi autem numeri idcirco ciclici vel spherici vocantur, quod sphera vel circulus in proprii semper principii reversione formantur" (éd. Friedlein, p. 121, 19-21); THIBAULT, III,iii, p. 91, 1-8; GUILLAUME, *Regule* ,III (*Appendice*, II, p. 100); ODON ne les mentionne pas.

21)Voir, par exemple, P.-H.MICHEL, *op.cit.* p. 298.

22)Nous avons vu une troisième manière de construire le nombre six en tant que *parte altera longior* : par addition des nombres pairs dans l'ordre naturel. Voir ci-dessus, p. 22,1.

Dans le premier cas, le nombre appartient aux superficiels (ou nombres plans); dans le deuxième exemple, aux nombres polygones, en étant triangulaire. Aucun de nos arithméticiens ne mentionne ce fait, bien que, implicitement, ils semblent le reconnaître. C'est peut-être pour cette raison que THIBAULT ne compte pas les nombres-produits parmi les figures, désignation qu'il réserve aux seuls polygones.

II NOMBRES POLYGONES (OU NOMBRES-SOMMES).[23)]

Le premier nombre polygone, trois, le seul nombre ayant un commencement, un milieu et une fin, est considéré, par les Pythagoriciens, comme le "nombre de l'univers",[24)] par PLATON comme le premier nombre "réel", [25)] figure "mère", base de tous les autres nombres polygonaux. [26)]

A la différence des plans et des solides, considérés en tant que produits, les nombres polygones résultent de la sommation de séries.

1º *Nombres-triangles*.

Les nombres triangles sont obtenus par la sommation d'une progression arithmétique de raison 1, à partir de l'unité : [27)]

---

23) BOECE, *Inst.Arithm.* II.6 ss; THIBAULT, II,iv, p. 93-95. Cf. P.-H.MICHEL, *op. cit.* p 299 ss.

24) ARISTOTE, *Traité du ciel* : "... trois est tout et... renferme toutes les dimensions possibles. En effet, ainsi que le disent les Pythagoriciens, l'Univers entier et toutes choses dont il est composé sont déterminées par le nombre trois. A les entendre, la fin, le milieu et le commencement forment le nombre de l'univers (du Tout)" (trad. Barthélémy de Saint-Hilaire, p.2). Cf. aussi NICOMAQUE,*Introd.Arithm.* (...d'Ooge, *op.cit.* p. 105); MARTIANUS CAPELLA, *De Nuptiis*..., VII,733 (éd. Dick, p. 368-369).

25) *Tim.* 53 c.

26) BOECE, *Inst.Arithm.* II, 18, titre : "... triangulus numerus omnium reliquorum principium est"(éd. Friedlein, p. 102). Voir ci-après la construction des nombres polygonaux à partir du triangle.

27) BOECE, *Inst.Arithm.* II,9 : "Nascuntur autem trianguli disposita naturali quantitate numerorum si prioribus semper multitudo sequentium congregetur. Disponatur enim naturalis numerus hoc modo : I. II. III. IIII. V. VI. VII. VIII. IX. Ex his igitur si primum sumam, id est unitatem, habeo primum triangulum,qui est vi et potestate, nondum etiam actu nec opere. Huic se secundum adgregavero, qui in naturali numerorum dispositione descriptus est, id est binarium, primus mihi triangulus opere et actu nascitur, id est ternarius. Si vero huic tertium ex naturali numero adiecero, secundus mihi opere et actu, triangulus procreatur. Super unum enim et duo si tertium, id est ternarium adgregavero, senarius extenditur, secundus scilicet triangulus. Huic vero si consequentem quaternarium superposuero, denarius explicatur, qui est tertius actu triangulus, quos per latera disponens ad superioris descriptionis exemplar cunctos triangulos numeros sine ullius dubitationis erroribus pernotabis" (éd. Friedlein, p. 94,4-22). Cf. également, *ib.* II,15 (p. 98, 23-24) et II, 23 (p. 107, 5-10) ; GUILLAUME D'AUBERIVE, *Regule* , VII (*Appendice*, p.104) et THIBAULT, p. 94 : *Quomodo creentur trianguli*...

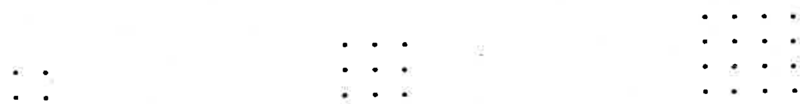
1 + 2 = 3 (premier triangle) | 1 + 2 + 3 = 6 (deuxième triangle) | 1 + 2 + 3 + 4 = 10 (troisième triangle)

etc. [28]

2º *Nombres carrés*.

Les nombres carrés sont obtenus par la sommation d'une progression arithmétique de raison 2 à partir de l'unité : [29]

1 + 3 = 4 (premier carré) | 1 + 3 + 5 = 9 (deuxième carré) | 1 + 3 + 5 + 7 = 16 (troisième carré)



etc. [30]

THIBAULT place cette règle, un peu illogiquement, dans son chapitre sur la multiplication [31] - preuve qu'il ne distingue pas clairement entre nombres-produits et nombres-sommes.

3º *Nombres pentagones*.

Les nombres pentagones sont le résultat de la sommation de termes d'une progression arithmétique de raison 3, à partir de l'unité : [32]

---

28) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II,7 (éd. Friedlein, p. 92-93), qui reproduit les figures géométriques des triangles. Cf. aussi ci-dessous, les *proportions*, p.74 ss (BOECE, II,33).

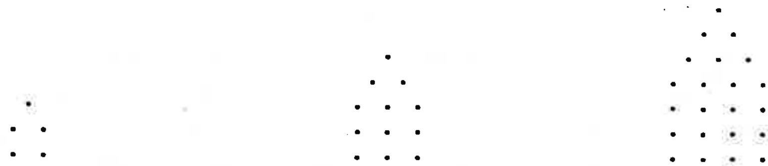
29) BOECE, *Inst.Arithm.* II,12 (éd. Friedlein, p. 96, 8-22) : "Disponatur enim numerus naturalis hoc modo : I. II. III. IIII. V. VI. VII. VIII. IX. X. XI. Ex his igitur si unum respiciam, primus mihi natus est potestate quadratus. Quod si uno relicto priori tertium iunxero secundus mihi quadratus efficitur. Nam si uni relicto binario ternarium adposuero, quaternarius mihi quadratus exoritur. Quod si rursus relicto medio quaternario quinarium similiter adgregavero, quadratus mihi tertius, id est novenarius, procreatur", etc. Cf. également, *ib.* II, 33 : "... et post hos (triangulos) tetragoni uno intermisso... nascebantur" p. 107, 10) et *ib.* II,15 : "Quadrati vero numeri, id est tetragoni, procreatio fiebat ex numeris qui uno intermisso copulabantur, cum se binario superarent" (p. 98, 24-25). THIBAULT, III,iii; ODON, II,II,v; GUILLAUME, *Regule* , VIII (*Appendice* , II, p.104).

30) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II,10, qui reproduit les figures des carrés (éd. Friedlein, p. 95).

31) Voir p.37.

32) BOECE, *Inst.Arithm.* II, 14. Nos auteurs ne mentionnent pas cette figure.

1 + 4 = 5 (premier pentagone) — 1 + 4 + 7 = 12 (deuxième pentagone) — 1 + 4 + 7 + 10 = 22 (troisième pentagone)



etc. [33]

Nos auteurs sont très peu éloquents sur les qualités mathématiques des nombres figurés que nous venons de passer en revue. [34] S'ils les définissent, ils se bornent à en donner de très brèves définitions, proches de celles de BOECE, sans même reproduire, comme nous l'avons fait, les figures géométriques de ces nombres. Nous l'avons déjà remarqué : [35] ils ne semblent pas non plus distinguer explicitement entre les nombres en tant que produits et en tant que sommes. [36] Néanmoins, on le verra dans la partie consacrée à la symbolique, ils sont conscients des possibilités qu'offrent ces nombres, à la fois par leurs qualités arithmétiques et par leur aspect géométrique. C'est ainsi que l'analogie qu'établit THIBAULT entre le nombre trois et le feu ne s'explique qu'à partir de la forme du triangle, dont la pointe monte vers le ciel "imitant la forme du feu". [37] De même lorsque, dans son prologue,[38] THIBAULT dit que le nombre trois est sacré parce que toute figure "se résoud" en lui, il pense au triangle, figure-mère, qui engendre tous les autres polygones.

---

33)Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II, 13 (éd. Friedlein, p. 97), qui reproduit les figures des pentagones.

34)ODON les passe tout à fait sous silence : quand il mentionne le carré (II,II,v, cf. ci-dessus, p.37), c'est en tant que nombre produit, non en tant que figure. GUILLAUME, dans ses *Regule* et dans son interprétation symbolique des nombres 3 et 4 (*De ternario* ..., ch. 1 et 2) ne tient pas compte non plus des figures.

35)Cf. ci-dessus, p. 66-67.

36)THIBAULT le fait implicitement, pourtant, quand il définit deux fois les carrés : en tant que superficiels (III, iii, p. 90, 5-6) et en tant que figures (III, iv, p. 93, 9 ss). Répétons que, pour THIBAULT, les linéaires, les superficiels (plans) et les solides ne sont pas nombres figurés - dénomination qu'il réserve aux seuls polygones : III,iii, p.93 : *De figuris, id est de triangulis, etc.*

37)III,iv, p. 93, 1-4.

38)Voir texte, p. 106.

GUILLAUME D'AUBERIVE est le seul, parmi nos théoriciens, à souligner ce fait : nous reproduisons son schéma qu'il a directement emprunté à BOECE :[39)]

trianguli	I	III	VI	X	XV	XXI
quadranguli	I	IIII	IX	XVI	XXV	XXXVI
pentagoni	I	V	XII	XXII	XXXV	LI
exagoni	I	VI	XV	XXVIII	XLV	LXVI
eptagoni	I	VII	XVIII	XXXIII	LV	LXXXI

On peut déduire de ce schéma que l'unité est toujours le premier triangle, le premier carré, etc. *en puissance*, alors que la construction des nombres polygones se fait à partir du triangle, *origo figurarum* :

le premier triangle (3) + le deuxième triangle (6) = le deuxième carré (9)
le deuxième - (6) + le troisième triangle (10) = le troisième carré (16)
le premier - (3) + le deuxième carré (9) = le deuxième pentagone (12)
le deuxième - (6) + le troisième carré (16) = le troisième pentagone (22)
le premier - (3) + le deuxième pentagone (12) = le deuxième hexagone (15)
le deuxième - (6) + le troisième pentagone (22) = le troisième hexagone (28)

etc.

39) *Inst.Arithm.* II, 17 (éd.Friedlein, p. 101); GUILLAUME, *Regule*, XI (*Appendice*, II, p. 106).

QUATRIEME PARTIE

LES RELATIONS ENTRE LES NOMBRES [1)]

L'*habitudo*, ou la relation entre les nombres, se divise, chez THIBAULT, en trois catégories :

I : selon l'ordre (*de ordine*)
II : selon les proportions (*de proportione*)
III: selon les affinités entre les nombres (*de affinitate*)

THIBAULT est le seul, parmi nos auteurs, qui réunit, dans un même chapitre, ces trois espèces de relation.

I

SELON L'ORDRE

Il s'agit, dans la catégorie, *selon l'ordre*, de la place qu'occupe le nombre dans la série, par rapport à un autre nombre.

HUGUES DE SAINT-VICTOR prête une attention particulière à l'ordre des nombres, puisque pas moins de trois règles sur neuf sont consacrées à cette question. [2)]

a) la première règle de HUGUES, *secundum ordinem positionis*, situe le nombre par rapport à l'unité : parce qu'il est le premier nombre, 1 signifie le commencement de toutes choses; 2, qui s'éloi-

---

1) THIBAULT, IV, i-iii, p. 96-105.
2) *Secundum ordinem positionis; Secundum ordinem porrectionis; Secundum numeri computationem* (*De Script. Sacris*, XV, *PL*, 175,22) : *Appendice*, I, p. 84-85.

gne de l'unité devient symbole du péché.[3] Nous aurons l'occasion de discuter plus longuement cet exemple, fréquent dans l'arithmologie pythagoricienne et adopté par l'exégèse patristique.

b) la troisième règle de HUGUES, *secundum ordinem porrectionis*, situe le nombre par rapport à ceux qui le précèdent ou qui le suivent : 7 après 6 symbolise le repos après l'oeuvre; 9 avant 10, la déficience avant la perfection; 11 après 10, la trangression [4] - autres exemples "classiques" du répertoire symbolique.

c) la cinquième règle de HUGUES, *secundum numeri computationem*, situe le nombre dans la série décimale : le nombre 10, limite de la première série, symbolise la perfection. [5]

En réalité, ces trois règles de HUGUES se recouvrent partiellement :

a) et c) pourraient se réduire en une seule règle, puisque 1 et 10, selon la tradion exégétique, ont le même sens : [6] la série des nombres, commençant à l'unité, se "replie" dans le dénaire, après quoi les nombres ne font que se répéter. ODON reste fidèle à cette tradition lorsque, dans son prologue,[7] il attribue la même signification à l'unité et au nombre dix : "...denarius unitas est, sed ille incipiens, ista terminans, sed ista et ille significans illum qui est alfa et omega, primus et novissimus". De même, THIBAULT considère, après JEROME, l'unité comme le premier nombre limite, 10 comme le deuxième, etc. [8]

La règle b) ne se distingue pas non plus essentiellement de a) et c), puisque quelques-uns des exemples que donne HUGUES sous b), sont relatifs à la règle c) : ainsi, 9 et 11 qui se situent par rapport à 10.

Les trois règles peuvent donc se réduire à deux, peut-être même à une seule. C'est d'ailleurs ce que fait GEOFFROY D'AUXERRE, qui ne distingue aucun cas spécifique parmi ses exemples :
ainsi, 13 après 12 (le Christ théophanique qui suit ses disci-

---

3) "...ut unitas, quia prima est in numeris, rerum omnium significat principium. Binarius, quia secunda est, et primus ab unitate recedit, peccatum significat quo a primo bono deviatum est."
4) "... ut septenarius ultra senarium requiem post operationem... Novenarius ante denarium, defectum intra perfectionem. Undenarius ultra denarium, extra mesuram transgressionem."
5) "...ut denarius perfectionem significat, quia in eo porrectio computationis finem facit."
6) Cf. saint AMBROISE, *De mans*. XLIII; saint JEROME, *Adv. Iov*. 1-22; saint AUGUSTIN, *Serm*. XXXI et *Quaest.evang*. II,40. - De même pour 2, 20, 200, etc.
7) *Proemium*, XVII.
8) IV,i,1, p. 97,4-5.

ples) [9] ou 20, qui est la seconde "summa" dans laquelle se termine la seconde série des nombres. [10]

ODON [11] et THIBAULT [12] ne suivent pas la division de HUGUES, mais considèrent uniquement la place du nombre par rapport à la *summa*, c'est-à-dire - à en juger d'après leurs exemples :

a) 10, 100, 1000, etc. (*limites*)

b) 10, 20, 30, etc. (*articuli* ou parfois appelés aussi *limites*)

On retrouve donc pour les mots *summa* et *limes*, la même ambiguïté que pour le terme de *perfectus*. [13]

ODON [14] et THIBAULT [15] proposent chacun plusieurs manières de considérer la position du nombre. Le nombre peut être :

a) *égal à la somme* (*in summa*): en ce cas, le nombre est "parfait" parce qu'il n'excède ni ne reste en-deça de la "somme".

b) *au-delà de la somme* (*ultra summam*), comme 11 par rapport à lo. [16]

c) *en-deça de la somme* (*citra summam*), ce qui est le cas des nombres qui n'atteignent pas à la perfection.

d) *proche de la somme* (ODON : *vicini summis*; THIBAULT : *prope summam* [17]), donc proche de la perfection.

e) *loin de la somme* (*remoti summis*), donc loin de la perfection. Cette catégorie ne se trouve que chez ODON.

f) *au milieu de la somme* (*in medio summe*) que THIBAULT illustre par une citation de MARTIANUS CAPELLA : le nombre 5 est "louable", parce qu'il divise la décade en deux. [18]

Enfin, une dernière catégorie comprend, chez THIBAULT, les nombres qui sont premiers dans leur genre, comme 3 qui est le premier triangle; 4, le premier carré; 8, le premier cube, etc. [19]

---

9) Nombre 13, p. 6,7-9.
10) Nombre 20, p. 19,18 - p. 20,1.
11) III,I,vii.
12) IV,i, p. 97-99.
13) Cf. ci-dessus, p.32.
14) III,I,vii.
15) IV,i.
16) Cette *transilitio* (ODON) peut recouvrir, selon les circonstances, une signification positive ou une signification négative : 11 peut "surpasser" 10 (comme le célibat surpasse l'exigence des commandements) ou il peut trangresser les 10 commandements. Cf. aussi HUGUES, règle 3 (*Appendice*, I, p.84).
17) Cette catégorie englobe, chez THIBAULT, les *citra* et *ultra summam*.
18) Il ne semble donc pas connaître le témoignage de RUPERT DE DEUTZ, *De Trinitate*, (*PL*, 167, 1485 C) qui, au contraire, juge négativement le nombre 5, parce que celui-ci est la moitié du nombre de la perfection.
19) THIBAULT, IV, i, p. 99.

II
SELON LES PROPORTIONS [1)]

Malgré la grande importance que BOECE attribue aux proportions arithmétiques et musicales, [2)] nos auteurs du XII^{e} siècle semblent vouer peu d'intérêt à cette partie des mathématiques.

ODON s'excuse de ne pas traiter à fond les proportions, prétextant d'une part que ce sujet n'est pas indispensable à la matière, d'autre part qu'il a peur d'ennuyer le lecteur par des explications incessantes sur les "profondeurs de la spéculation arithmétique". [3)] Néanmoins, il est le seul à exploiter symboliquement les relations harmoniques - nous le verrons plus tard.

Chez GUILLAUME D'AUBERIVE, [4)] nous trouvons un résumé très succint, schémas à l'appui, des chapitres correspondants de BOECE.

THIBAULT se contente d'une présentation brève, mais précise, sans application symbolique, des proportions arithmétiques et musicales d'après BOECE. [5)]

Pour BOECE, la *proportio* est un rapport entre deux termes, de sorte que l'un est pour ainsi dire contenu dans l'autre : [6)]

par exemple : $\frac{2}{1}$ ou $\frac{4}{2}$ [7)]

---

1) THIBAULT, IV,ii, p. 100-101, les définit ainsi : "Proportionibus, id est pro partibus, id est secundum partes innata relatio". ODON appelle les "relationes numerorum" : *consonantiae, coaptiones, habitudines* (II,III,ii).
2) *Inst.Arithm.* II, 39-54; *De musica*, I, 16-19; II, 3-31.
3) II,III,i : "Verumtamen non de omnium natura relationum nos disserere pollicemur, partim quia suscepta id materia non exigit, partim ne tedium inferamus, si etiam atque etiam profunda arithmetice speculationis in medium deducamus".
4) *Regule*, XI (*Appendice*, II, p.106).
5) IV, ii, p. 100-101.
6) "*Proportio* est duorum terminorum ad se invicem quaedam habitudo et quasi quammodo continentia" (*Inst.Arithm.* II,40; éd. Friedlein, p. 137,13-15). "*Proportio* enim est duorum terminorum ad se quadam comparatio" (*ib.* II,12; p. 241, 16-17).
7) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II, 40 : "...ut binarius ad unum, quoniam duo sunt termini, duplam obtinet proportionem. Sin vero quattuor contra duo compares, hic quoque dupla proportio est."

La *proportionalitas*, par contre, est une relation analogue entre plusieurs rapports (au moins trois) réduits à une unité commune :[8)]

par exemple : $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$

THIBAULT ne distingue pas entre rapport (*proportio*) et proportion (*proportionalitas*)[9)] : ses exemples relèvent uniquement des proportions :

une proportion est *continue*[10)] si les deux termes intermédiaires, respectivement numérateur et dénominateur des extrêmes, sont égaux :[11)]

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

une proportion est *discontinue* si les quatre termes sont différents, de manière que le premier terme se réfère au deuxième comme le troisième se réfère au quatrième :[12)]

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

La proportion continue comporte donc au moins trois termes, la proportion discontinue quatre.[13)]

8) "*Proportionalitas* est duarum vel plurium proportionum similis habitudo, etiamsi non eisdem quantitatibus et differentiis constitutae sint" (BOECE, *Inst. Arithm.* II,40; p. 137,10-13). - "Ex iunctis enim proportionibus proportionalitas fit" (*ib.* p. 137, 16-17). - "Est enim *proportionalitas*... collectio proportionum in unumque redactio" (*ib.* p. 137, 24-26). - "*Proportionalitas* est aequarum proportionum collectio. Proportionalitas vero in tribus terminis minimis constat" (*Inst.Mus.*II,12; éd. Friedlein, p. 241, 18-20).Et encore : "Quos tres terminos si continue consideres, ex duabus proportionibus fit *proportionalitas* unum ad duo et duo ad quattuor" (*Inst.Arithm.* II,40, p. 138, 16-27). Cf. également *ib.* p. 138, 5-7 : "...quemadmodum sunt III. ad II., sic sunt II. ad unum, et rursus quemadmodum unus ad duo, sic duo ad quattuor".

9) IV, ii,1, p. 100,6 : "hec *proportio*, sive *proportionalitas*".

10) THIBAULT,(IV,ii,p.100,4-7) l'appelle aussi : proportion de raison identique (*in eadem ratione*).

11) Cf. BOECE, *Inst.Arithm.* II,40 (éd. Friedlein, p. 138,1-4) : "...quotiens unus atque idem terminus ita duobus circum se terminis communicat, ut ad unum *dux* sit, ad alium *comes*, haec *proportionalitas continua* vocatur, ut unus, duo, quattuor". - *Ib.* I, 24 (p. 49,27) : "Vocem autem maiores numeros *duces*, minores *comites*".

12) THIBAULT (IV,ii, 2, p. 100,lo ss) l'appelle : proportion de raison différente (*proportionalitas in diversa ratione*). BOECE, *Inst.Arithm.* II, 40 : "Quantum enim tres superant binarium,tantum binarius unitatem et quanto unus a duobus minor est, tanto binarius a ternario superatur. Sin vero alius ad unum refertur terminus, alius vero ad alium, necesse est *habitudinem disiunctam* vocari, ut ad qualitatem quidem proportionis sunt : I. II. IIII. VIII" (éd. Friedlein, p. 138, 7-13).

13) *Inst.Mus.* II, 13 : "Continua...; unus enim idemque numerus medius nunc quidem maiori subponitur, nunc vero minori praeponitur. Quotiens vero duo sunt medii,

BOECE poursuit cette démonstration par un long développement sur les médiétés [14] - ou moyennes - arithmétiques, géométriques et harmoniques des proportions continues : [15]

1º dans la *médiété arithmétique*, les différences entre les termes successifs sont égales :

1 - 2 - 3 ou 3 - 2 = 2 - 1

mais le rapport des termes les plus grands est plus petit que celui des termes plus petits :

2 = le double de 1; 3 = sesqualtère à 2 [16] ou :

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$$

2º la médiété est *géométrique*, lorsque ses différences sont inégales : 1 - 2 - 4 et que les termes les plus grands forment un rapport égal à celui des termes plus petits :

2 = le double de 1 comme 4 est le double de 2 [17] ou :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

3º la médiété est *harmonique* quand, d'après BOECE qui suit NICOMAQUE, "le grand terme est au petit comme la différence du moyen au grand est à la différence du moyen au petit": [18]

---

tunc *disiuncta proportionalitas* nuncupatur... Unde intelligi potest, *continuam* quidem proportionalitatem in tribus minimam terminis inveniri, *disiunctam* vero in quattuor" (Friedlein, p. 243, 2-11).

14) "On appelle médiété...une progression de trois termes tels que deux d'entre eux et deux de leurs différences soient dans le même rapport" (P.-H.MICHEL et J.ITARD, dans *La Science antique et médiévale* (publiéee sous la direction de R.Taton), Paris, 1966, p. 230. Cf. aussi P.-H.MICHEL, *De Pythagore à Euclide*, p. 365 : *les médiétés*).

15) *Inst.Arithm.* II, 41 ss (éd. Friedlein, p. 138 ss); *Inst.Mus.* II, 12 ss (éd. Friedlein, p. 241 ss).

16) *Inst.Arithm.* II, 43 : "*Arithmeticam medietatem* vocamus quotiens vel tribus vel quolibet terminis positis aequalis atque *eadem differentia* inter omnes dispositos terminos invenitur" (éd. Friedlein, p. 140, 19-22). - "Sit *continua medietas* I.II.III. Hic unus a duobus et duo a tribus solis tantum singulis distant, et sunt *eaedem differentiae*, proportiones vero aliae (éd. Friedlein,p. 141, 8-11). Cf.aussi *Inst.Mus.* II, 12 (éd. Friedlein, p. 241, 25 - p. 242,1 ss).

17) *Inst.Arithm.* II, 44 (éd. Friedlein, p. 144 et, surtout, p. 145,11 ss; *Inst.Mus.* II, 12 : "Aut est aequa in utrisque proportio non vero aequalibus differentiis constituta, ut in his numeris I.II.IIII. Nam II. ad I. ita sunt dupli, quemadmodum quaternarius ad binarium. Sed inter quaternarium binariumque binarius, inter binarium atque unitatem unitas differentiam facit."

18) NICOMAQUE, *Introd.arithm.* II,25,1 (cf. P.-H.MICHEL, *op.cit.* p. 388); BOECE, *Inst.Arithm.* II,47 : "Armonica autem medietas est, quae neque eisdem differentiis nec aequis proportionibus constituitur, sed illa, in qua *quemadmodum maximus terminus ad parvissimum ponitur, sic differentia maximi et medii contra differentiam medii atque parvissimi comparatur*" (éd. Friedlein, p. 152, 1-7); cf. *Inst.Mus.* II, 12 (éd. Friedlein, p. 242, 7-17). - Pour d'autres témoignages (d'ARCHYTAS et de PLATON), voir P.-H.MICHEL, *op.cit.* p. 387.

3 - 4 - 6 : le rapport des extrêmes et celui des différences sont en raison double, puisque 6 est le double de 3 et la différence entre 4 et 6 est le double de la différence entre 3 et 4 :

$$\frac{6}{3} = \frac{6-4}{4-2} = \frac{2}{1}$$

BOECE clôt son livre sur l'arithmétique par la *proportion musicale* [19] qui a cette caractéristique que les rapports de ses termes réalisent à la fois une proportion arithmétique, géométrique et harmonique. L'exemple classique, qui remonterait au-delà de PYTHAGORE, est celui des relations réciproques entre les nombres 6,8,9 et 12: [20]

- la série 6 - 9 - 12 est une *proportion arithmétique* : entre 6 et 12, 9 constitue la moyenne arithmétique.
- la série 6 - 8 - 12 forme une *proportion harmonique* : 8 est la moyenne harmonique de 6 et 12.
- enfin, 6 - 8 - 9 - 12 forment une *proportion géométrique*, où 8 est sesquitiers à 6 comme 12 est sesquitiers à 9 :

$$\frac{12}{9} = \frac{8}{6}$$

Cette même harmonie comprend les plus importants intervalles musicaux : [21]

$\frac{9}{8}$ = le ton $\frac{6}{12}$ = le diapason (double), l'octave

$\frac{9}{6}$ ou $\frac{12}{8}$ = le diapente (sesquialtère), la quinte

$\frac{6}{8}$ ou $\frac{12}{9}$ = le diatessaron (sesquitiers), la quarte

Les mêmes proportions reçoivent, on le voit, des noms différents, latins ou grecs, selon qu'elles appartiennent à l'une ou l'autre discipline : "... vocabitur quidem, quae in numeris *sesquitertia*, *diatessaron* in sonis, quae in numeris *sesqualtera*, *diapente*

---

19) C'est ainsi que l'appelle NICOMAQUE dans son *Introd.arithm.* II,29; pour BOECE, c'est la "maxima perfectaque armonia" (*Inst.Arithm.* II, 54, p. 169, 11). Cf. aussi BOECE, *Inst.Mus.* II, 12 (éd. Friedlein, p. 241-242).
20) BOECE, *Inst.Arithm.* II, 54 (éd. Friedlein, p. 170, surtout l. 21 - p. 171,20).
21) THIBAULT, IV,ii,2. Voir MARTIANUS CAPELLA, *De Nuptiis*... VII, 737.

appellatur in vocibus, quae vero in proportionibus *dupla* est, *diapason* in consonantiis...".[22)]

ODON consacre, dans la deuxième partie de son traité, les troisième, quatrième et cinquième chapitres de la troisième *clausula* (II, III, iii, iv et v) à la définition et à l'explication de ces proportions :

le diapason (*dupla habitudo*) contient deux fois le nombre
le diapente (*sesqualtera*) contient le nombre plus 1
le diatessaron (*sesquialtera*) contient le nombre plus le tiers, etc.

Il s'applique à montrer, dans son cinquième chapitre, la différence entre d'une part les *sesqualteri*, *sesquitercii*, *sesquiquarti*, etc. qui tiennent leur nom de la partie du nombre et, d'autre part, les *dupli*, *tripli*, *quadrupli*, etc. dont les noms indiquent combien de fois il contiennent le nombre.

Or, aucun de nos auteurs ne traite directement des trois médiétés malgré toutes les possibilités symboliques que contient cette matière. THIBAULT est celui qui s'en approche le plus, mais il ne fait que citer presque littéralement un passage de MARTIANUS CAPELLA sur le nombre 6 attribué à Vénus ainsi qu'à l'harmonie,[23)] parce que 6 entre dans des "proportions musicales" : par rapport à 12, 6 est en harmonie de diapason, par rapport à 9 en harmonie de diapente, et est, avec 8, en relation de diatessaron.

De même, THIBAULT fait allusion [24)] à la célèbre anecdote sur les marteaux de PYTHAGORE, rapportée, après beaucoup d'autres, par MACROBE.[25)]

---

22)BOECE, *Inst.Mus.* I,7 (éd. Friedlein, p. 194, 22-25). Cf. aussi *ib.* I, 1 : "Ipsorum quoque sonorum adversus se proportio solis neque aliis numeris invenitur. Qui enim sonus in *diapason* symphonia est, idem duplicis numeri proportione colligitur; quae *diatessaron* est modulatio, *epitrita* conlatione componitur; quam *diapente* symphoniam vocant, *hemiolia* medietate coniungitur; qui in numeris *epogdous* est, idem *tonus* in musica, et ne singula persequi laborem, huius operis sequentia, quanto prior sit arithmetica sine ulla dubitatione monstrabit" (éd. Friedlein, p. 11, 14-22) et *id.Inst.Mus.* I, 33 : "...ita etiam nunc lectoris fidei quae proponimus commendamus, ut arbitretur *diapason* in dupla, *diapente* in sesqualtera, *diatessaron* in sesquitertia, *diapente ac diapason* in triplici, *bis diapason* in quadrupla proportione consistere" (éd. Friedlein, p. 223, 9-13) - Cf. CHALCIDIUS *In Tim.* III, 44 (éd. Wrobel, p. 111 et 113) et MACROBE, *Comm. Somn.Sc.* I,vi,43-44 (éd. Willis, p. 26, 4-12) et II, 14 ss (p. 97, 23 ss) où MACROBE explique longuement l'équivalence entre la musique et l'arithmétique. De même THIBAULT, IV, ii, p. 101.

23)IV,ii,2; MARTIANUS CAPELLA, *De Nuptiis...* VII, 737.

24)Texte, p. 101: "Hee enim proportiones in metallis faciunt has armonias in sonis"

25)*Comm.Somn.Sc.* II,i,9 ss (éd. Willis, p. 96, 23 ss) : la légende raconte que PYTHAGORE, passant devant une forge, remarque les sons harmonieux que produi-

Etonnante pauvreté de nos auteurs dans ce riche domaine des proportions ! Remarquons que, dans ce passage, THIBAULT n'en fait aucune application exégétique et que son seul exemple de symbolisme se réfère à la mythologie ! Dans les chapitres consacrés aux procédés d'exégèse symbolique, nous verrons que tel n'est pas le cas pour ODON. [26)]

sent quatre marteaux de poids différents frappant l'un après l'autre l'enclume. Il aurait ainsi découvert les proportions harmoniques : lorsque les marteaux pesant respectivement 8 et 9 livres se suivent, ils font résonner le ton; lorsque ce sont les marteaux de 6 et 12 livres, l'octave (*diapason in duplo*) se fait entendre; quand les marteaux de 8 et 6, 12 et 9 livres se succèdent, on perçoit la quarte (*diatessaron*); enfin ceux pesant 12 et 8, 9 et 6 livres produisent la quinte (*diapente*).

26)Voir II,III, *De proprietate numerorum*, ch. v-xvii.

III
SELON LES AFFINITES [1)]

Alors que ses prédécesseurs ne mentionnent qu'une ou deux sortes d'affinité entre les nombres, [2)] THIBAULT DE LANGRES n'en propose pas moins de six "modes d'affinités" :

1. *affinité de lieu*, c'est-à-dire la proximité à laquelle deux nombres se trouvent l'un de l'autre : [3)]

20 et 21 signifient tous deux, par exemple, "fin de croissance" : 20, parce qu'à cet âge, les jeunes d'Israël commençaient leur service militaire; 21, parce que, d'après MACROBE, 3 x 7 années [4)] indiquent la limite de croissance.

Cette catégorie, qui rappelle vaguement celle de l'*ordo*, [5)] est absente chez les autres théoriciens.

2. *affinité de contenance* : c'est le cas où un nombre est contenu entre les deux termes extrêmes d'un autre nombre; [6)] ainsi 6 et 8 sont "affinés", puisque

$$6 = 7 - 1 \quad \text{et} \quad 8 = 7 + 1.$$

ODON, GEOFFROY et GUILLAUME ne proposent pas d'exemples similaires. Pour ODON, la signification *a continentiis* [7)] est tout autre chose : il s'agit là d'un nombre qui contient d'autres nombres, de

---

1) Nous avons déjà présenté brièvement les nombres d'affinité dans le chapitre consacré à la partition (cf. ci-dessus : nombres parfaits, p. 29), où sont mentionnés également les nombres d'amour et d'amitié. Nous n'avons pas trouvé trace de ces appellations chez BOECE.

2) GUILLAUME D'AUBERIVE, *Regule*, (*Appendice*, II, p.103), distingue entre *affinitas* tout court (THIBAULT la divise en plusieurs catégories) et *affinitas denominationis* (= nombre d'amour). GEOFFROY ne fait pas de distinction entre les les différentes sortes d'affinité, mais parmi les exemples qu'il propose, il s'en dégage trois que nous retrouvons chez THIBAULT. - ODON ne parle pas des nombres d'affinité.

3) THIBAULT, IV, iii, 1, p. 102 (*affinitas loci*).

4) Texte, p. 102,9-11.

5) Cf. ci-dessus, p. 71 ss

6) IV,iii, 2, p. 103 (*affinitas continentie*).

7) III, I, xi.

manière à revêtir une signification mystique :

6 = l'âme (2, image et ressemblance, multiplié par 3 = la Trinité, qui est entièrement dans l'image et la ressemblance).

3. *affinité d'"inhérence"* : lorsque deux nombres différents sont attachés à un même objet, il y a *affinitas inherentie*.[8] Ainsi, Vulcain (= 8) est appelé mari de Vénus (=6),[9] puisque le cube a 8 angles et 6 surfaces.

4. *affinité par la somme des parties aliquotes* : lorsque la somme des parties aliquotes de deux nombres différents est égale, il y a, pour THIBAULT, *affinitas denominationis* :[10] ainsi, il y a affinité entre 16 et 33 dont la somme des parties aliquotes, dans les deux cas, est 15. Ce dernier est donc "nombre d'amour" entre 16 et 33,[11] bien que THIBAULT n'emploie pas cette expression.

GEOFFROY, par contre, donne à plusieurs reprises des exemples de "nombres d'amour", auxquels il n'accorde pourtant pas une place particulière :

15 est le nombre d'amour entre 16 et 33 [12]
17 est le nombre d'amour entre 55 et 39 [13]
21 est le nombre d'amour entre 91 et 51.[14]

5. *affinité d'engendrement* : lorsque le même nombre est engendré de manières différentes, il y a *affinitas obviationis* :[15] Ainsi, 8 est le nombre d'affinité entre 2 et 10, parce qu'il est à la fois le résultat de l'addition des parties aliquotes de 10 (1+2+5) et le cube de 2. THIBAULT semble avoir emprunté cet exemple à GUILLAUME.

Le texte de GEOFFROY comporte également des exemples de cette affinité - mais toujours sans nom spécifique. Le procédé de GEOFFROY est parfois bien tortueux, comme on pourra le constater par les exemples suivants :[16]

---

8) THIBAULT, IV, iii, 3, p. 103.
9) MARTIANUS CAPELLA, *De Nuptiis*, VII, 740.
10) IV,iii,4, p. 103-104.
11) Cf. plus haut, p. 33 ss
12) Texte, p. 12,26 - p. 13,2 (nombre 16).
13) Texte, p. 14,16-17 (nombre 17).
14) Texte, p. 16,14-15 (nombre 18).
15) THIBAULT, IV, iii, 5, p. 104. - GUILLAUME D'AUBERIVE, dans ses *Regule*, donne la même définition, mais valable en général : "Numerus affinitatis est..", etc. (cf. VI, *Appendice*,II, p.103).
16) Nombre 14, p. 8, 14-19; nombre 17, p. 14, n.5.

le nombre d'affinité entre 14 et 7 est 28, parce que si l'on additionne 14 avec ses parties constitutives (10 et 4), on obtient 28, qui est aussi la somme de l'agrégation de 7 !

De même, et c'est plus subtile, 10 est le nombre d'affinité entre 14 et 4, car 10 = la somme des parties aliquotes de 14 (1,2,7) et est en même temps le résultat de l'agrégation de 4.

6. *affinité de composition*, enfin : lorsque deux nombres sont composés des mêmes termes, mais de manières différentes, il y a *affinitas compositionis* :[17)]

ainsi, il y a affinité entre 7 (3 + 4) et 12 (3 x 4) : puisque 7 signifie l'universalité (la vie spirituelle (3) et la vie matérielle (4)), le nombre 12 adopte le même sens.

De même, il y a affinité entre 18 (10 + 8) et 80 (10 x 8) : l'exemple de la femme ayant vécu dix-huit années dans le péché est assimilé aux quatre-vingts jours pendant lesquels la femme israëlienne, ayant accouché d'une fille, devait se purifier.

GUILLAUME D'AUBERIVE [18)] donne une foison d'exemples - tous centrés sur le nombre 12 - de cette affinité très simple :

12 est la nombre d'affinité entre 6, 4, 3, 2, puisque

12 = 6 x 2 ou 3 x 4.

De même, il y a affinité entre :

12 (10 + 2) et 20 (10 x 2);

12 (3 + 9) et 27 (3 x 9), etc.

Cette affinité de composition est celle qui est représentée le plus fréquemment chez GEOFFROY,[19)] mais sans porter de désignation spéciale.

---

17) IV,iii,6, p. 104-105.

18) *Regule*, VI , *Appendice*, II, p. 103.

19) On trouve deux exemples pour le nombre 13; trois pour le nombre 15; un pour les nombres 16 et 17; deux pour le nombre 18; un pour le nombre 20.

A P P E N D I C E

I

HUGUES DE SAINT-VICTOR

DE NUMERIS MYSTICIS SACRAE SCRIPTURAE

DE NUMERIS MYSTICIS SACRAE SCRIPTURAE [1)]

Significant autem his novem modis :

1) SECUNDUM ORDINEM POSITIONIS
2) SECUNDUM QUALITATEM COMPOSITIONIS
3) SECUNDUM MODUM PORRECTIONIS
4) SECUNDUM FORMAM DISPOSITIONIS
5) SECUNDUM COMPUTATIONEM
6) SECUNDUM MULTIPLICATIONEM
7) SECUNDUM PARTIUM AGGREGATIONEM
8) SECUNDUM MULTITUDINEM
9) SECUNDUM EXAGGERATIONEM

Numeri igitur novem modis significant in divino eloquio : secundum ordinem positionis, secundum qualitatem compositionis, secundum modum porrectionis, secundum formam dispositionis, secundum computationem, secundum multiplicationem, secundum partium aggregationem, secundum multitudinem, secundum exaggerationem.

1. *Secundum ordinem positionis* : ut unitas, quia prima est in numeris, rerum omnium significat principium. Binarius, quia secundus est, et primus ab unitate recedit, peccatum significat quo a primo bono deviatum est.

2. *Secundum qualitatem compositionis* numeri significant, ut idem binarius qui sectionem recipit, et in duo dividi potest, corruptibilia et transitoria significat. Ternarius vero, quia unitate media interveniente sectionem non recipit, ut in duo aequa dividatur, indissolubilia et incorruptibilia designat.

3. *Secundum modum porrectionis* numeri significant, ut septenarius ultra senarium requiem post operationem. Octonarius ultra septenarium, aeternitatem post mutabilitatem. Novenarius ante denarium,

---

1) Nous reproduisons ce texte d'après la *Patrologia latina*, 175, 22-23 (HUGUES DE SAINT-VICTOR, *De scripturis et scriptoribus sacris*, cap. XV).

defectum intra perfectionem. Undenarius ultra denarium, extra mensuram trangressionem.

4. *Secundum formam dispositionis* , ut denarius, qui in longum tenditur, rectitudinem fidei significat. Centenarius, quia in latum expanditur, amplitudinem charitatis. Millenarius qui in altum levatur, altitudinem spei designat. Rectitudinem ad se, latitudinem ad proximum, altitudinem ad Deum. Primae igitur et principali unitati ex his tribus membris ordine positionis, denarius proximus est; millenarius forma dispositionis. Ille loco vicinior, iste perfectione similior.

5. *Secundum numeri computationem* ut denarius perfectionem significat, quia in eo porrectio computationis finem facit.

6. *Secundum multiplicationem* numeri significant, ut duodenarius universitatis signum est, quia ex ternario et quaternario invicem multiplicatis perficitur; quoniam quaternarius corporalium, ternarius spiritualium forma est.

7. *Secundum partium aggregationem* numeri significant, ut senarius forma est perfectionis, propterea quod partes eius ternarius, binarius, unitas, aggregatae simul totum complent; et nec ultra exuberant, nec infra subsistunt, quod perfectioni convenit, in qua nec plus iusto nec minus esse debet.

8. *Secundum multitudinem partium* numeri significant, ut binarius propter duas unitates charitatem Dei et proximi. Ternarius propter tres, trinitatem. Quaternarius, propter quatuor tempora, temporalia, quoniam annus et mundus quatuor partibus distinguuntur. Quinarius, quinque sensus. Septenarius, praesens saeculum, quod septem diebus volvitur.

9. *Secundum exaggerationem* numeri significant, cum causa exigit aggravari, et cum quadam exaggeratione iis, quae praemissa sunt, responderi, quale est illud in *Levitico* : *Ad Adam correptiones vestras septuplum propter peccata vestra,* [2] ubi nihil aliud quam multiplicitas poenae signatur, expressa per septenarium. Ex paucis multa sapiens perpendere discat.

---

2) *Lev.* XXVI, 18.

APPENDICE

II

GUILLAUME D'AUBERIVE

EPISTULA AD THOMAM MONACHUM

EPISTULA AD MAGISTRUM A. BISUNTINUM

REGULE ARITHMETICE

INTRODUCTION

Le monastère d'Auberive fut fondé en 1135, dans le diocèse de Langres, par les moines de Clairvaux. GUILLAUME en devint, en 1165, son troisième abbé.

Il nous laisse un traité sur les nombres 3 à 12, ainsi que trois lettres. Dans deux de ces lettres - adressées respectivement au moine THOMAS et au maître A.DE BESANÇON - GUILLAUME D'AUBERIVE se défend contre ceux qui ne sont pas arrivés "par un peu d'entraînement de l'esprit, à saisir la fuite des choses subtiles et à dégager la signification cachée dans les phrases obscures" de son traité. [1)]Pour faire taire ces injustes critiques, il décide d'écrire, sur le conseil du maître de Besançon,[2)] un condensé des règles de BOECE, sorte d'explication préliminaire de la matière arithmétique sous-entendue dans son traité. Ce sont ces deux lettres ainsi que ses *Regule* que nous publions ici pour la première fois. [3)]

En ce qui concerne le traité lui-même ainsi que la troisième lettre, adressée au moine ETIENNE qui lui a demandé des explications sur les significations du nombre 40, nous renvoyons le lecteur à l'excellent article, déjà cité, de Dom Jean Leclercq [4)] dans lequel sont publiés de très larges extraits du traité ainsi que toute la lettre sur le nombre 40.

Les deux lettres qui ont pour destinataires le moine THOMAS et le maître A. De BESANÇON, sont intéressantes à plusieurs points de vue : d'une part, elles nous font entrevoir le "climat" dans lequel travaillaient ces théologiens arithméticiens pas toujours très bien compris

---

1) Voir la lettre au maître de Besançon, p. 92.
2) Voir ci-dessous, p.92.
3) G. BEAUJOUAN, *Le symbolisme des nombres à l'époque romane*, dans *Cahiers de Civilisation médiévale*, 1961, a pourtant édité une partie de la lettre au maître de Besançon (voir *art.cit.* p. 166).
4) *L'arithmétique de Guillaume d'Auberive*, dans *Analectica Monastica*, 1ère série, *Studia Anselmiana*, 20, 1948, p. 181-204. Malheureusement, l'édition de M.TACCETTI, présentée en 1967 à l'Ecole des Chartes, n'est pas accessible.

par leur entourage; d'autre part, elles témoignent des difficultés qu'ont éprouvées les lecteurs de GUILLAUME à comprendre son ouvrage sur les "sacrements" des nombres 3 à 12. De plus, elles prouvent le lien qui a existé entre les auteurs, qui échangent leurs notes et brouillons ; elles permettent, enfin, de situer dans le temps, la rédaction des traités de GUILLAUME et de GEOFFROY.

Dans la lettre qu'il envoye au moine THOMAS, GUILLAUME se plaint qu'on ait fait circuler, parmi ses confrères, une version défectueuse copiée d'après les feuilles qu'il avait lues en public et qu'il n'a pas eu l'occasion de corriger. C'est pour arrêter les critiques qu'il fait cadeau à THOMAS de son traité définitif sur les nombres, lui recommandant de ne jamais le faire copier sans que la transscription ne soit accompagnée de sa préface (c'est-à-dire la lettre) dans laquelle il corrige quelques fautes. [5] La rédaction de cette lettre se situe donc peu de temps après la composition de son traité. Comme GUILLAUME devient abbé d'Auberive en 1165, nous avons donc là un *terminus a quo* pour ses activités littéraires.

Grâce à l'allusion que fait l'auteur à GEOFFROY, continuateur de son traité et "maintenant abbé de Fossenove", sa lettre adressée au maître A.DE BESANÇON nous fournit le *terminus ad quem* : comme l'abbatiat de GEOFFROY à Fossenove s'étend de 1171 à 1176, [6] GUILLAUME a dû rédiger sa lettre avant 1176. Le traité et la lettre au moine THOMAS ont donc été composés entre 1165 et 1170; la lettre au maître de Besançon, suivie par ses *Regule*, entre 1171 et 1175.

Cette même lettre nous explique aussi les circonstances qui ont précédé la rédaction des "Règles arithmétiques" : au lieu d'essayer de rendre son traité plus accessible en incorporant, après coup, au texte même, les explications qui s'imposaient, GUILLAUME a préféré écrire, sur le conseil de son correspondant, une sorte d'introduction dans laquelle il expose les règles qu'il juge les plus indispensables pour la compréhension de son oeuvre. L'allusion qu'il fait à GEOFFROY prouve que ses *Regule* ont été rédigées après la parution du traité de GEOFFROY. Son admiration sans bornes pour le "style resserré" de son successeur ne manque d'ailleurs pas de saveur : en louant ainsi GEOFFROY, il se défend indirectement lui-même contre

---

5) Ainsi son exposé sur la supputation du cube de 7 et sur le "fruit" de la progression arithmétique de raison 12 dont le premier terme est 30. Cf. ci-dessous, p. 35.

6) Cf. *Cahiers de l'Institut du Moyen Age grec et latin*, 29, Note biographique, p. XIV.

l'accusation que le maître de Besançon avait lancée contre lui, à savoir que la brièveté de son ouvrage en rendait l'intelligence difficile.

Dans certains manuscrits, les *Regule* sont introduites sous le titre d'"Extraits de Boèce". Or, mis à part le début et la fin du texte - peut-être ajoutés par quelque scribe - ces règles sont bien l'oeuvre personnelle de GUILLAUME. A l'encontre des lettres, qui ne se trouvent que dans un seul manuscrit,[7] les "Règles" figurent dans plusieurs manuscrits : dans le ms. LUXEMBOURG, Bibl.Nat. 60 (L),[8] dans le ms. PARIS, B.N. f. lat. 3011 (V), [9] et dans le ms. TROYES 969 (T). Dans les mss L et V - qui contiennent également les traités de GEOFFROY et de THIBAULT - le texte est placé correctement en tête du traité de GUILLAUME; dans le ms. T, il fait suite au traité et à la lettre adressée au maître de Besançon.

---

7) Le ms TROYES 969.

8) Cf. notre description de ce ms. dans *Cahiers*...29, p. XIX-XX.

9) Cf. notre description de ce ms. *ib.*, p. XXI-XXII.

T 177^{r}a INCIPIT EPISTULA AD THOMAM MONACHUM VEL PREFACIO IN TRACTATUM NUMERORUM A TERNARIO USQUE AD DUODENARIUM

Venerabili fratri Th. frater W. salutem in Domino.

Postulatio tua valide apud me exactionis obtinet locum. Scripsi itaque tibi quorumdam numerorum pauca, serens non disserens, signans non reserans misteria, sciens certe cui loquor, cui datum sit desuper prospicere per cancellos et ianuis nondum patentibus nec dicam clausis rimula tenui tam invido quam avido mentis acumine sapientie penetralibus illabi. Quo probabilius industrie tue argumentum nescientibus te quod darem non habui, quam si tibi et satis adhuc talium rudi, tam abstrusa, signata tantum, proponerem, non ignarus ut iurisprudentis utar verbis, quod rerum subtilium fugas exercitate mentis velocitas comprehendat, et ad ea que sunt caligantibus impedita sententiis, expedienda sufficiat. Tu vero exprobrantibus michi responde pro me, qui ob gratiam tui presumpserim grandia inusitare, et in mirabilibus, ut aiunt, super me ambulans involvere sententias sermonibus imperitis.

Quorum sane de me non reprehendo iudicium, sed coram eis si non dissimulant, ori digitum superpono. Michi certe loquor, et meis, non que vulgo committantur et publico, sed que familiari inter amicos dignoque ocio conferantur.

Transcripserunt aliqui, quod utinam non fieret, priusquam diligentius inspicerentur, scedulas nostras, que quidem coram prudenter disquirentibus sicut eas legi, non sicut reliqui nostras, falsitatis notam non evadunt, sed iusto sunt repudiande iudicio, tam in septe-
T 177^{r}b narii supputatione cubica quam in duodenario / disquisitione, in eo videlicet, quod sicut ibi legitur duodenario cum tricenario iuncto et gradatim deinceps apposito, fructus semper excrescat duodenarius. Quod non perhenniter quidem, sed usque in terciam et quartam generationem perseverat, quousque scilicet obvius fiat prospere procedenti, qui denominationem accipit ab eo qui et ipse primus ordinem illorum quos primos et incompositos dicunt, intercidit, id est no-

venarius, a quo nonagenarius denominative dicitur. Sed diligentius, qua rationis constantia, tam hec quam relique que ordine suo secuntur intercalationes conserventur, cum nostras legeris pervidebis.

Habeant sibi falsas autem falsatas, unde michi somnolentiam imputent, dummodo me vera tantum et comprobasse et scripsisse michi tuo iudicio constiterit. Suis enim instrumentis, ut ait Boecius, res rationis expenditur, cum iudicium cogitur subire prudentis. Illud sane memineris, quod in hoc maxime horum versatur intentio, unde vel instruatur fides vel mores imbuantur, disquirere, ubi et precipue quadriformis occurrit consideratio, quid videlicet in partium sectione, quidve in singulorum dimensione trina, sacramenta refulgeat, tantum ut detur occasio sapienti, non ut omnia que in eis vestigari possunt, annotentur, et quidem iuxta circumstantiam locorum, temporum, personarum, actionum, variatur etiam sacramentum numerorum. Ceterum si quis et in hoc tepuisse me arguat, quod per singulos omnium pene propositorum numerorum gradus, vel eadem vel consimili via et fine sacramentum elicitur, non michi contingat in eorum indagatione, alio me diu distendi scrutinio quam quod per bonam vitam ad
177va vitam beatam pertingitur, et quod in Scripturis Dei typice / adumbratis diversis et modis et figuris, eadem nostre salutis sacramenta replicantur. Hec nobis via sit, hic sit et finis. Tu frater, dicatum tibi munusculum et gratanter suscipe, et dispice diligenter. Et si id forte transcribi tibi dignum iudicaveris, non nisi premissa hac prefaciuncula transcribatur.

EXPLICIT EPISTULA VEL PROEMIUM

LETTRE DE GUILLAUME D'AUBERIVE AU MAITRE A. DE BESANÇON.

T 191va Amantissimo domino et vere venerando magistro A. Bisuntino frater W. de Alberipa salutem in Domino. Vestre illius sincerissime et de puro caritatis fonte manantis non immemor reprehensionis super opusculo illo, quod de sacramento numerorum inscriptum legistis, vobiscum sentio quod brevitas illius nimis[a], nisi forte his qui et divinis assueti litteris et artis illius, dico autem numerorum, domestici sunt, obscuritatis confusionem quam intellectionem[b] pariat, stulticieque fuerit scribere quod nemo intelligat, si scriptorem eius, cui vel soli vel precipue lectio talis porrecta est, subtilitas ingeniique vivacitas non excuset. Iustum proinde visum est, quia plurimorum infusum auribus latere omnino non potuit, vestro consilio, tardiuscu-
T 191vb lis morem / gerere et aliqua modo introductorio, unde utcumque tam abstrusa in lucem prodeant, quia competenter interseri non possunt, ne non *ventrem eburneum, distinctum saphiris,*[1] sed laceram *pardi* pariat *pellem* tam dissona stili *varietas*,[2] saltem seorsum vel in calce subnectere, faciliusque fuerit tamquam de recenti opus cudere novum, quam grossum aliquid subtilibus per totum intexere.

In his autem que ad explanationis erudicionem assumuntur, ut planius fiat, quod dicitur, modo sensus verborum tantum plerumque etiam verba ipsa auctoris[3] posita sunt et quantum ad numerorum non sacramentorum intelligentiam visum est sufficere posse.

Nam sacramentorum intelligentia divine potius lectionis noticiam usumque desiderat. Vestri iudicii erit ferro calamoque non parcere, ut quod secandum mutandumve, vel addendum fuerit, studii vestri diligentia compleatur.

---

a) nimis / nimia T
b) intellectionem / lectionem T. Nous devons cette interprétation à M.Jan PINBORG.

---

1) *Cant.Cant.* V,xiv.
2) Cf. *Ier.* XIII,xxiii : "Si mutare potest AEthiops *pellem* suam/ aut *pardus varietates* suas."
3) C'est-à-dire Boèce.

In hoc siquidem vel maxime mutue caritatis experientiam capimus, si invicem que inhonesta nostra sunt, his abundantiorem honorem circumdamus.

Illud quoque, quia gratissimum credidi, dignationi vestre intimare curavi, quod magnus ille et inter primos temporum nostrorum quos novimus Scripturarum sanctarum discussores egregius, Gaufridum loquor, nunc abbatem Fosse Nove, ut prioris operis corpus augeret, manum dignanter apposuerit, a duodenario qui finis huius est ad vicenarium usque tractando progrediens, augens non parum precedentibus scientiam et doctrinam, dignus plane quia geminavit funiculum, geminum reportare manipulum. In quo nimirum non minus arte cautus quam humilitate devotus, cum instar[a] precedentium stilum contrahere studuerit, ne manus elegantia ea quibus apponebatur e vicino splendore consumeret, non tamen pro voto obtinuit, ut non altior
192[r]a appareret, tanto / in sacramentorum discussione profundior, quanto mentis intelligentia sublimior. Ubi et de perfectorum generatione sacramentoque seorsum sublimiter disserens, luce clariores perfectionis distinxit gradus congruumque tractatus sui in perfectione finem constituit, quem prioribus in unum corpus conexum non parvum mutue dilectionis pignus vobis gratanter omnino pro sui dignitate suscipiendum, legendum transmisi.[4)]

---

a) instar / instrar *T*

---

4) Cette dernière partie (Illud quoque... transmisi) a été publiée par G.BEAUJOUAN dans son article *Le symbolisme des nombres à l'époque romane*, dans *Cahiers de Civilisation Médiévale*, IV, 1961, p. 166.

I

L 30[v] T 192[r] V 75[r] REGULE A DOMINO GUILLELMO ABBATE EXCEPTE[a]

L 31[r] *Plato*[b] *in Tymeo eiusdem nature / et alterius nominat, quicquid in hoc mundo est. Atque aliud in sua putat natura permanere individuum inconiunctumque et rerum omnium primum, alterum divisibile et nunquam in proprii ordinis statu permanens. Philolaus vero : Necesse est, inquit, omnia que sunt, vel infinita esse vel finita, demonstrare scilicet volens, omnia, que sunt ex his duobus consistere, aut ex finita scilicet essentia aut ex infinita,*[c] *ad numeri sine dubio similitudinem. Hic*[d] *enim ex uno et duobus, ex impari atque*[e] *pari coniungitur,*[f] *que manifesta sunt equalitatis atque*[g] *inequalitatis, eiusdem atque alterius, diffinite atque indefinite esse substantie. Quod videlicet non sine causa dictum est,*[h] *omnia, que ex contrariis consisterent, armonia quadam coniungi atque componi. Est enim armonia plurimorum adunatio et dissentientium*[i] *consensio.*[1)]

Et supra : *Omne autem*[j] *quicquid in propria natura substantiaque est immutabile,*[k] *terminatum diffinitumque est, quippe quod nulla ratione*[l] *mutetur, nunquam esse desinat, nunquam esse possit, quod non fuit. Atque hec unitas sola est. Et que unitate formantur, comprehensibilis et determinate et eiusdem substantie esse dicuntur. Ea vero*

---

a) *Regule a domino Guillelmo abbate excepte* *L* / *om.* *T V*
b) *Plato* / *Boetius* : *Plato* *V L* (Friedlein, p. 126,2 : *Plato quidem*).
c) *ex his duobus consistere, aut ex finita scilicet essentia aut ex infinita* / *vel ex infinita essentia vel ex finita constare* *V L* (Friedlein, p. 126, 9-10 : *ex his duobus consistere, aut ex finita scilicet esse aut ex infinita*).
d) *Hic* / *hoc* *L*
e) *atque* / *et* *V L*
f) *coniungitur* / *conficitur* *V L*
g) *atque* / *et* *V L*
h) Dans *V*, le scribe a suscrit : *Boèce*.
i) *dissentientium* (Friedlein, p. 126, 17: *dissendium* , mais d'autres versions de Boèce portent la même leçon que nos manuscrits.
j) *autem* / *om.* *V L*
k) *immutabile* (Friedlein, p. 125, 7 : *inmobile*).
l) *ratione* (Friedlein, p. 125,8 : *variatione*).

---

1) *Inst.Arithm.* II, 32 (Friedlein, p. 126, 2-17).

sunt, que[m] ab equalibus crescunt, velut[n] quadrati, vel quos ipsa uni-
192rb tas format, / id est impares. At vero binarius et cuncti parte altera
31v longiores, qui a finita substantia dis/cesserunt, variabilis infinite-
75v que / substantie nominantur. Constat[o] ergo omnis numerus ex his, que
longe disiuncta sunt atque contraria, ex imparibus scilicet et paribus.[2)]

Que tamen in unam[p] quoddammodo amicitiam cognationemque miscentur, et illius unitatis informatione atque regimento unum numeri corpus efficiunt.[3)]

Item.[q] Est ergo princeps imparis ordinis unitas, que ipsa quidem effectrix et quodammodo forma[r] quedam est imparitatis, quoniam tantum eiusdem nec mutabilis substantie est,[s] ut, cum vel se ipsam multiplicaverit, vel in planitudine vel in profunditate, vel si alium quemlibet numerum multiplicet per se ipsam, a prioris quantitatis forma non discrepet.[t] Namque[u] si semel unum facies,[v] vel si[w] duo semel, vel si tres semel,[x] seu alium quemlibet multiplicet,[y] a quantitate sua is, quem multiplicat,[z] numerus non recedit, quod circa alium numerum non potest[aa] inveniri.

Paris vero ordinis binarius princeps est, que dualitas, cum in eodem ordine paritatis sit, tum principium est alteritatis.[bb] Namque

---

m) *que* (Friedlein, p. 125, 13 : *vel quae*).
n) *velut / veluti V L* (Friedlein, p. 125, 13 : *ut*).
o) *ergo / igitur V L*
p) *Que tamen in unam* (Friedlein,p. 125,22 : *Que scilicet cum sint contraria, in unam*).
q) *Item / om. L*
r) *forma V L / om. T*
s) *quoniam tantum eiusdem nec mutabilis substantie est / que in tantum eiusdem immutabilisque substantie V* (=Friedlein, p. 118, 18-19) / *in tantum eiusdem immutabilisque substantie L*
t) *vel in planitudine, vel in profunditate, vel si alium quemlibet numerum multiplicet per se ipsam, a prioris quantitatis forma non discrepet* (= Friedlein, p. 118, 20-21) / *vel alium quemlibet numerum per se duxerit, ipsa a prioris forme non discrepet quantitate V L*
u) *namque / nam V L*
v) *facies* (Friedlein, p. 118,22 : *facias*).
w) *si / om. V L*
x) *vel si tres semel* (Friedlein, p. 118,23-24 : *vel si tres semel, vel si quattuor semel*).
y) *alium quemlibet multiplicet / quemlibet numerum unitate multiplices V L* (Friedlein, p. 118,24-119 : *vel quemlibet alium numerum multiplicet*).
z) *multiplicat / multiplicas V L*
aa) *potest / est V L*
bb) *que dualitas, cum in eodem ordine paritatis sit, tum principium est alteritatis / qui cum eodem sit ordine paritatis, principium tamen totius alteritatis est V L* (Friedlein, p.119,5 : ... *tum principium totius alteritatis est*).

---

2) *ib.* II, 32 (Friedlein, p. 125, 6-19).
3) *ib.* II, 32 (Friedlein, p. 125, 22-25).

si [cc]*se ipsam multiplicet, vel per latitudinem, vel etiam per profunditatem,* [dd] *vel si quemlibet alium in suam conglobet quantitatem,* [ee]
V 76r *continuo / alter* [ff] *exoritur,* ut *bis unum duo* sunt, *bis duo quatuor,* bis tres sex. [4)]

II

PARES ET IMPARES [a]

L 32r Numerus alius *par*, alius *impar*. [1)] *Impar* numerus / est cuius unus medietas est. Iuxta quod ternarius primus impar est. *Par* vero est cuius binarius medium tenet, principiumque eius et finis equa subsistunt quantitate. Ergo quaternarius primus par est.

1) De divisione imparis numeri. [b] Impar numerus, alius *primus et incompositus*, alius *secundus et compositus*. [2)]

T 192v *Primus et incompositus* est, quem nullus preter unitatem metitur / numerus, ut quinarius et septenarius. Hi enim et horum similes incompositi sunt, quia ex *unitate* tantum, *que omnium mater est numerorum*, [3)]

---

cc) *namque si / nam si vel V L*
dd) *si se ipsam multiplicet, vel per latitudinem, vel etiam per profunditatem / si vel se ipsum qualibet dimensione multiplicet V L*
ee) *vel si quemlibet alium in suam conglobet quantitatem / vel aliquem alium in sua quantitate conglobet V L* (Friedlein, p.119,7 : *vel si quem numerum...)*.
ff) *continuo alter / continuo numerus alter V L*

a) Pares et impares / *om. T V* / Diffinitio *L*
b) De divisione imparis numeri *L* / *om. T V*

---

4) *ib.* II, 28 (Friedlein, p. 118, 16 - p. 119, 8).

1) Ici commence l'exposé personnel de Guillaume. Les paragraphes qui suivent ne s'inspirent d'aucune source particulière, mais se présentent comme un résumé raisonné des éléments fondamentaux de l'arithmétique.
Pour les *pares* et *impares* en général, cf. Boèce, *Inst.Arithm.* I, 3, 4, 5, 6 (Friedlein, p. 13-15); Martianus Capella, *De Nuptiis*...VII, 748 (Dick, p.379); Macrobe, *Comm.Somn.Sc.* I,vi (Eyssenhardt, p. 495, 17 ss; Willis, p. 18, 18 ss); Cassiodore, *Institutiones*, II,iv, *De Arithm.* iii (Mynors, p. 133 ss; *PL* 70,1205) dont l'exposé s'apparente, par sa brièveté, à celle de Guillaume; Isidore, *Etym. De Mathematica*, (Lindsay, III,v,1).
2) Pour les *primi et incompositi* et les *secundi et compositi*, cf. Boèce, *op. cit.* I, 18 (Friedlein, p. 30, 16 ss); *ib.*I, 15 (p. 31, 24 ss); *ib.*I, 16 (p. 32, 24 ss); *ib.*I, 17 (p. 33, 19 ss); Martianus Capella, *De Nuptiis*... VII, § 743 (Dick, p. 376); *ib.*VII, § 750 (p. 381); *ib.*VII, § 772-792 (p. 399-418); Cassiodore, *Inst.* II,iv, *De Arithm.* (Mynors, p. 134); Isidore, *Etym. De Mathematica* (Lindsay, III,v).
3) Boèce, *op.cit.* I, 14 (Friedlein, p. 30, 28); *ib.* I, 17 (p. 37, 18); *ib.* II, 8 (p. 93, 7).

procreati sunt, et primi sunt, quia velud prime substantie vim sortiti, alios creare possunt, tanto verius immutabilis substantie imitatores effecti, quo insecabiles manent.

Secundus autem *et compositus* est, qui et a seipso et ab alio partes habet denominatas, ut novenarius et quindenarius, quorum alter nonam partem habet unitatem a tota sui quantitate denominatam, et terciam ab alio, id est ternario, dictam. Alter vero et quintamdecimam et quintam et terciam. Hic autem secundus et compositus nullam in se retinet substantiam principalem, quia licet alios creet non tamen principaliter aut primarie, non solum quippe quod habet, sed et quod ex-
76v hibet aliis de/bet, in quo quamvis inferior incomposito sit, immuta-
32v bilis tamen substantie participat, eo quod imparium / proprietate formatur.

Sunt item numeri natura quidem secundi et compositi, ad invicem vero comparati primi incompositique redduntur, quoniam nulla eos communis mensura metitur, nisi unitas que omnium numerorum communis mensura est, ut sunt novenarius, vicenarius quinarius, quorum neuter cum altero partes aliquas equivocas habet, nec eam quidem que ab utrisque[c] denominata est. Nam ipsa unitas que communis est amborum, in altero nona, in altero vicesima quinta est. [4]

Generatio autem secundorum et compositorum sic colligitur. Dispositis in[d] ordine cunctis imparibus a ternario et supra, ternarius prius seipsum deinde ceteros ducens ex ordine, secundos et compositos procreabit. Simili modo quilibet reliquorum imparium, vel seipsum vel ceterorum quemlibet multiplicans, non nisi secundos et compositos ef-
192v ficiet tres, quinque, septem, novem, undecim, / tredecim, quindecim, septemdecim, decem novem, viginti unum, viginti tres, viginti quinque, viginti septem, viginti novem, triginta unum.

Primus, id est ternarius, duobus post se transmissis, quem post eos primum repperit, per seipsum ductus metitur. Tres enim ter, fa-
7r ciunt novem. Rursus duos post novem transiens, id est / undecim et tredecim, eum qui primus occurrerit, ternarius per se sequentem, id est per quinarium, metietur. Ter enim quinque, faciunt quindecim. Item duobus post quindecim intermissis, eum qui sequitur ternarius, per sep-

c) utrisque *V L*/ altrisque *T* (*al-* a été exponctué dans *L* ; *u* est suscrit).
d) in / ex *V L*

4) Cf. Boèce, *op.cit.* I, 16 : "De eo qui per se secundus et compositus est, ad alium primus et incompositus" (Friedlein, p. 32-33); Cassiodore, *op.cit.* II, iv (Mynors, p. 134) et Isidore, *op.cit.* (Lindsay, III,v,8). Un nombre peut donc être tantôt *primus et incompositus*, tantôt *secundus et compositus* : ils appellent un tel nombre *mediocris*. Ainsi 9 est *primus et incompositus* par rapport à 25 et *secundus et compositus* quand on le compare à 15.

L 33r tenarium metietur. Ter septem quippe iungunt / viginti unum. Atque
hoc idem in infinitum faciens, repperies primum imparem si binos in-
termiserit omnes sequentes posse metiri, secundum quantitatem posi-
torum in ordine imparium numerorum. Si vero de secundo imparium nu-
mero, id est quinario, cuius prima ac deinceps mensura sit nosse de-
sideras, transmissis quatuor imparibus, quintus quem metiatur occur-
rit. Rursusque intermissis quatuor, quintum qui sequitur metietur.
Post quem quatuor idemtidem transitis, quem quinarium numeri minis-
traverit series, ab ipso metiendus erit. Atque hic ordo ratus omni-
modis perseverat.

Suscipient igitur vicissitudinem metiendi reliqui impares, sicut
sunt[e] in ordine naturaliter constituti. Primus videlicet duobus trans-
positis tercium; secundus, quatuor transmissis quintum; tercius, sex
transitis septimum; quartus, octo de medio factis nonum; quintus, quo-
que decem intermissis, undecim metietur, et in ceteris usque in extre-
mum eodem ordine percurret mensio.[5]

2) *Divisio paris numeri*. Par numerus alius *pariter par*, alius
V 77v *pariter impar*, et tercius, / qui amborum videtur medius, *impariter
par*.[6]

Pariter par numerus est, cuius divisio partium equaliter per duo
paria usque ad insecabilem progreditur unitatem. Quales sunt omnes qui
T 193r proportione duplici ab unitate surgunt hoc modo : unus, / duo, quatuor,
L 33v octo, / sedecim, triginta duo, sexaginta quatuor, centum viginti octo,
ducenti quinquaginta sex.

Pariter impar vero numerus est, qui cum et ipse in partes equales
dividatur, mox insecabiles permanent partes eius, quem binarius quem-
libet imparium multiplicans creat, ut bis ter, bis quinque, et nascun-
tur ex his sex, decem.

Impariter par numerus est, qui in partes equas dividitur, que rur-
sus in equales partes dividi possunt, sed non usque ad unitatem sectio
illa progreditur, in altero pariter paris, non pariter imparis propri-
etatem servans, quia scilicet plures recipit sectiones, in altero pa-
riter impari, non pariter pari concordans, quia scilicet usque ad uni-
tatem illa divisio non pervenit.

---

e) sunt / *om.* *L*

---

5) Pour les règles de la *generatio* des *secundi et compositi* exposées dans ce paragraphe, cf. Boèce, *op.cit.* I, 17 (Friedlein, p. 33 ss).

6) Sur les *pariter pares*, *pariter impares* et les *impariter pares*, cf. Boèce, *op. cit.* I, 8,9,10,11,12 (Friedlein, p. 17-30); Cassiodore, *Inst.* II,iv, *De Arithmetica*,iii (Mynors, p. 133-134; *PL* 70, 1203-1205); Isidore, *Etym. De Mathematica* (Lindsay, III,v,9 ss).

Nascuntur autem impariter pares ex linea imparium et linea pariter parium. Disponantur enim omnes in ordine suo impares et sub his a quaternario inchoantes omnes pariter pares[f] :

III	V	VII	IX	XI	XIII	XV	XVII	XIX
IIII	VIII	XVI	XXXII	LXIIII	CXXVIII	CCLVI	DXII	MXXIIII

Si per pariter parem quaternarium, singulos per ordinem impares
78[r] multiplices, vel per octonarium, vel sedenarium, seu reliquos pa/res qui sequuntur ex ordine, cunctos qui nati fuerint impariter pares invenies. Rursus si per [g] superiores impares singulos pariter parium du-
34[4] xeris, nullos alios / quam impariter pares nasci miraberis.

III

ITEM DIVISIO TOCIUS NUMERI SECUNDUM DIMENSIONEM[a]

Item numerus tribus modis consideratur, aut *in longitudine* scilicet, qui numerus dicetur *linearis*, aut *in latitudine* que dicitur *superficies*, seu *in profunditate* et hic est *solidus*. [1)]

Longitudo numeri propria ipsius quantitas dicitur, ut puta septem, octo.

Superficies vero duobus intervallis disparatur : longitudinis et latitudinis. *In longitudine ante et retro, in latitudine dextra et sinistra* tenditur intervallum. [2)]

Profunditas autem tercio etiam cum his intervallo solidatur, quod
193[r]b est *sursum et deorsum*. [3)] Tribus enim his solidum redditur corpus. / Nam quicquid aliquo istorum caret, solidum non est.

Numerus superficialis alius *equilaterus*, id est *tetragonus*, alius *parte altera longior*, alius *ante longior*. [4)]

f) pares / pares, ita *V L*
g) per *V L*/ *om. T*

a) Item divisio tocius numeri secundum dimensionem *L* / *om. T V*

1) Sur les *lineares*, les *superficiales* et les *solidi*, cf. Boèce, *op.cit.* II, 4 (Friedlein, p. 88, 13-28); Cassiodore, *Inst.* II,iv, *De Arithm.* vi (Mynors, p. 139 ss; PL 70, 1207-1208); Isidore, *Etym. De Mathem.* (Lindsay, III,vii, 3-6).
2) Boèce, *op.cit.* II, 4 (Friedlein, p. 88, 26-27).
3) *ib.* II, 4 (Friedlein, p. 88, 27-28).
4) Sur les *tetragoni*, les *parte altera longiores* et les *ante parte longiores*, cf. Boèce, *op.cit.* II, 25,26,27 (Friedlein, p. 111-117). Cf. aussi *infra*, ch. VIII et les chapitres XI-XIV.

Tetragonus, ut bis bini, ter terni. *Parte altera longior* , ut bis terni, ter quaterni. *Ante longior*, ut bis quaterni ter quini, ter seni, quater milleni.[b)]

Solidorum [5)] autem quatuor sunt species. Alii enim ex equalibus equaliter per equalia ducti sunt et hi dicuntur *cubi*, ut bis bini bis, ter terni ter; alii specie opposita, ex inequalibus inequali-
V 78[v] ter per inequalia crescunt, quos *scalenos* / dicunt, quos *gradatos* possumus dicere. Dicuntur etiam hi *spenici*, vel *cunei* , sive *emioli*, ut bis terni quater, vel ter quaterni quinquies.[c]

Alii ex equalibus equaliter in minus ducuntur, qui dicuntur *laterculi*, ut ter terni bis, quater quaterni ter. Alii ex equalibus
L 34[v] equaliter[d] in maius, qui dicuntur *asseres*,[e] ut bis / bini ter, ter terni quater, quater quaterni quinquies.[f]

Est autem de cuborum genere species quedam, eorum utique qui dicuntur *ciclici* vel *sperici*, qui scilicet ita ducti sunt, ut a quo numero cubici quantitatis latus ceperit, in eundem altitudinis extremitas terminetur, ut sunt multiplicationes, que a quinario, vel senario profiscuntur. Quotiens enim quemlibet horum sive tetragonice, sive cubice duxeris, tocies in proprii principii vocabulum redit, ut subiecta docet descriptio :

V	VI
XXV	XXXVI
CXXV	CCXVI
DCXXV	$\overline{\text{I}}$CCXCVI[g]
$\overline{\text{III}}$CXXV	$\overline{\text{VII}}$DCCLXXVI[h]

6)

b) quater milleni / *om.* *V L*
c) vel ter quaterni quinquies / *om.* *V*
d) Alii ex equalibus equaliter.. Alii ex equalibus... / les deux phrases sont inversées dans *V* *L*
e) in maius, qui dicuntur *asseres* / in maius perducuntur, et hos *asseres* vocant *V L*
f) quater quaterni quinquies / *om.* *V*
g) $\overline{\text{I}}$CCXCVI / $\overline{\text{I}}$CCXXVI *V* / MCCXXVI *L*
h) $\overline{\text{VII}}$ DCCLXXVI / $\overline{\text{VII}}$ CCCLVI *V L*.La bonne leçon de *T* a été "corrigée" dans *V* : -DCC- a été changé en -CCC-; dans -LXXVI- , XX a été effacé.

5) Pour les *solidi* en général, cf. Boèce, *op.cit.* II,4 (Friedlein, p. 86, 16 ss); *ib.* II, 20 ss (p. 104 ss); Cassiodore, *Inst.* II,iv *De Arithm.* vi (Mynors, p. 140; *PL* 70, 1208).
Pour les *cubi*, voir surtout Boèce, *op.cit.* II,25 (Friedlein, p. 111,10-p.113, 19) et *infra*, ch. IX-X.
Pour les *scaleni*, cf. Boèce, *op.cit.* II 25 (Friedlein, p. 114, 6-21).
Pour les *laterculi*, cf. Boèce, *op.cit.* II, 29 (Friedlein, p. 120, 12-20).
Pour les *asseres*, cf. Boèce, *op.cit.* II, 29 (Friedlein, p. 120,12 - p. 121,2).
Pour les *ciclici*, cf. Boèce, *op.cit.* II, 30 (Friedlein, p. 121,6 - p. 122,16).
6) Ce schéma se trouve chez Boèce, *op.cit.* II,30 (Friedlein, p. 122,12-16).

Hi sunt qui dicuntur *circulares*, quorum reversio semper in id ipsum.

Unitas quoque ipsa vi et potestate circulus vel sphera est. Quo-
T 194r *tiens enim punctum in se multiplicaveris, in se / ipsum, unde ceperat, terminatur. Si enim facias semel unum, unus redit; si hoc semel, idem est, et si hoc rursus semel, idem est.*[7]

IV

ITEM ALIA NUMERORUM DIVISIO SECUNDUM PARTICIONEM [a]

79r Numerorum alii *imminuti*, alii *abundantes*, alii *perfecti*. [1) /]

Imminutus est, cuius partes simul collecte totum numeri corpus, cuius partes sunt, implere non possunt, ut octonarius cuius partes sunt : quaternarius, binarius atque unitas. Qui numeri simul iuncti non complent octonarium. Quatuor enim et duo et unum non nisi septem
35r sunt. Item denarius / partes habet quinarium, binarium et unitatem. Quinque et duo et unum, octo sunt tantum. Ergo denarius imminutus est. Partes autem numeri proprie sunt, in quibus equaliter dividi potest numerus, cuius partes sunt. Itaque impares numeri naturaliter omnes imminuti sunt, vel incompositi. Nam quaternarius et ternarius non sunt proprie septenarii partes, quia non equaliter per eos[b] dividitur septenarius, sed unitas sola, ideoque incompositus est. Novenarius autem partes quidem habet, quia compositus est, ternarium et unitatem, que iuncte non nisi quatuor sunt. Quindenarius et ipse compositus, quinarium et[c] ternarium et unitatem, tantum partes habet, que novem reddunt. Proprium est igitur parium perfectos vel abundantes esse.

Abundans numerus est, cuius partes aggregate, totius sui corporis superant summam. Ut duodenarius, qui partes habet senarium, qua-

---

a) Item alia numerorum divisio secundum particionem *L*/ Item alia numerorum divisio *V* / *om.* *T*
b) eos / eas *V L*
c) et / *om.* *V L*

---

7) Boèce, *op.cit.* II,30 (Friedlein, p. 122,3-7).

1) Sur les *imminuti*, les *abundantes* et les *perfecti*, voir Boèce, *op.cit.* I, 19-20 (Friedlein, p. 39,16 - p. 45,9); Martianus Capella, *De Nuptiis*...VII § 753 (Dick, p. 383,7 - p. 384,9); Cassiodore, *Inst.* II, iv, *De Arithm.* iv (Mynors, p. 135; *PL* 70, 1206).

ternarium, ternarium, binarium et unitatem, que simul iuncte in sexdecim[d] excrescunt. Octodenarius[e] quoque[f] partes habet, alteram nove-
V 79v na/rium, terciam senarium, sextam ternarium, nonam binarium et summe sue nominativam : unitatem. Quibus pariter aggregatis, succrescit in viginti unum earum summa.

Perfectus autem numerus est, cuius partes omnes iuncte suo cor-
T 193v b pori equantur, ut senarius qui partes habet / : ternarium, binarium et unitatem, et he iuncte senarium complent, non ultra procedentes, nec residentes infra. Unum et duo et tria, senarium reddunt. Simili-
L 35v ter viginti octo in has sequatur / partes, quatredenarium, septenarium, quaternarium, binarium, unitatem, quas cum pariter aggregaveris, corporis sui summam solam et totam restituent.

V

QUOMODO INTELLIGENDA SIT AGGREGATIO NUMERORUM

Numerorum aggregationem dupliciter distinguimus. Est enim *aggregatio*, sive cum diversi numeri sibi pariter iunguntur, ut alium aliquem numerum sua copulatione conficiant, ut duo et tria et quatuor, novem faciunt et quinque cum septem, duodecim sunt; sive cum uniuscuiuslibet numeri, omnes qui in ipso continentur numeros colligimus, ut ex eorum collectione numerus alius efficiatur. Iuxta quod facit quaternarius denarium et senarius viginti et unum. Unum enim
V 80r et duo et tria et quatuor, decem sunt. Et rursus unum / et duo et tria et quatuor et quinque et sex, faciunt viginti et unum. Iuxta huiusmodi aggregationem, quindecim faciunt centum viginti; decem et septem, centum quinquaginta tres reddunt. Viginti, vero, ducentos et decem constituunt.

VI

DE NUMERO AMORIS ET NUMERO AFFINITATIS

Est *numerus amoris*, est et *numerus*[a] *affinitatis*.

Numerus amoris est, cum diversorum numerorum partibus sigilla-

---

d) sexdecim / sedecim *V L*
e) Octodenarius / Octidenarius *V L*
f) quoque / autem *L*

a) numerus / *om.* *L*

tim[b] aggregatis, ex utrarumque partium collectione unus et idem numerus redditur. Ut verbi gratia, duodenarii partes aggregate,[c] in se-
L 36r denarium, sicut supra dictum est, / surgunt. Viginti sex eundem quoque numerum, id est sedenarium, ex sua retinet partitione. Habet enim has tantum modo partes, tredenarium,[d] binarium et unitatem. Est ergo inter hos duos, id est duodenarium et viginti sex, sedenarius numerus amoris, quia in ipso, duo illi, velut in pacis osculo, coniunguntur. Similiter viginti septem et triginta[e] quinque, ex suis uterque parti-
P 194r bus, tredenarium reci/piunt. Decem et quadraginta novem, octo[f] faciunt. Nam quadraginta novem, preter septenarium et unitatem, nullam omnino recipit sectionem. In hunc modum quoque, triginta novem cum quin-
T 80v quaginta quinque, in decem et septem, in amoris osculo, copu/lantur. Omnis ergo numerus incompositus, quadratus, eiusdem incompositi sequentem reddit.[g]

Numerus affinitatis est, cum numeri diversi in aliquem sibi numerum occurrunt, sed modo diverso viaque dissimili. Ecce enim denarius, ut diximus, octonarium reddit, sed partium collectione. Eundem proculdubio binarius assequitur, sed sua cubicatione. Ipsum nichilominus quaternarius attingit, sed sua geminatione. Sic ergo[h] octonarius affinitatis est numerus inter denarium et binarium atque quaternarium, quia in ipso tres hi quadam affinitate iunguntur. Rursus in duodenario, non paucis propinquitatis prebetur affinitas. In ipso senarius geminatur, quaternarius triplicatur, quadruplicatur ternarius.
L 36v Septenarius / quoque per duas sui qualescumque partes ad invicem multiplicatas, surgit in ipsum. Hunc proculdubio in fructum recipiunt viginti quatuor, triginta, quadraginta duo, quinquaginta quatuor, sexaginta sex, septuaginta octo, et de cetero omnes quod primi et incompositi cuiuscumque dupli tres compleverint. Quicumque enim numerus sex incompositos numeros tantum in se habuerit, ipse duodenarium tantum in fructu recipiet. Ergo inter omnes huiusmodi numeros, duodenarius numerus affinitatis erit. Poterit fortassis et in hoc affinitas
T 81r assignari,[i] quod duodenarius nunc quidem ex binario et denario / aggregatis perficitur, nunc vero ex ternario et novenario, tercio ex quaternario et octonario, quarto quoque ex quinario et septenario,

---

b) sigillatim / singillatim *V*
c) partes aggregate / partes pariter aggregate *V L*
d) tredenarium, binarium /tredenarium, scilicet, et binarium *V L*
e) triginta *V L*/ triginti *T*
f) octo / octonarium *V L*
g) Omnis ergo numerus incompositus, quadratus, eiusdem incompositi sequentem reddit / *om. V L*
h) ergo / igitur *V L*
i) assignari / esse vel assignari *L*

quinto etiam ex duobus senariis, et per hoc affinis invenitur, primum quidem vicenario, qui et ipse ex binario et denario constat, non
V 81r aggre/gatis, sed per se invicem multiplicatis, secundo vero viginti septem, qui ex ternario et novenario multiplicatur, tercio autem triginta duobus, qui numerus ex quater octonis subsistit, quarto quoque triginta quinque, qui ex quinque septenis fit, quinto etiam triginta sex, qui numerus sexies senis perficitur. In denominatione quoque consideratur affinitas, iuxta quod ternarius tricenario, quaternarius quadragenario, quinarius quinquagenario et in ceteris similiter affines dicuntur.

VII

QUOMODO CREENTUR TRIANGULI [1)]

Numerus naturalis aggregatus sibi per singulos, singulos generat triangulos. Unum, duo, tres, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, decem.

Iunge binarium unitati, et habebis ternarium, primum actu triangulum. Quibus duobus iunge tres, et facies secundum triangulum, id est senarium. Iunge quatuor, et facies tercium, id est denarium.[a] Iunge quinque, et facies quartum, id est quindecim. Ergo quod est omnis summa continue aggregationis quantitate numeri, idem est om-
L 37r nis triangulus.[b]

VIII

QUOMODO CREENTUR TETRAGONI. NUMERUS IMPAR. [2)]

Unum, tres, quinque, septem, novem, undecim, tredecim, quindecim,
V 81v decem et septem, decem et novem, viginti et unum.[c] Impares aggregati per singulos, singulos creant tetragonos. Unum enim et tres faciunt

---

a) denarium / decem *L*
b) Ergo quod est omnis summa... est omnis triangulus *L* / *om.* *T V*
c) decem et septem, decem et novem, viginti et unum / *om.* *V L*

---

1) Cf. Boèce, *Inst. Arithm.* II,9 (Friedlein, p. 94,3 - p. 95,6). Thibault de Langres reprendra textuellement, dans son traité, ce passage (voir notre édition, dans *Cahiers de l'Institut du Moyen-Age grec et latin*, 29, p. 94).
2) Cf. Boèce, *Inst. Arithm.* II,12 (Friedlein, p. 96,1 - p. 97,3).

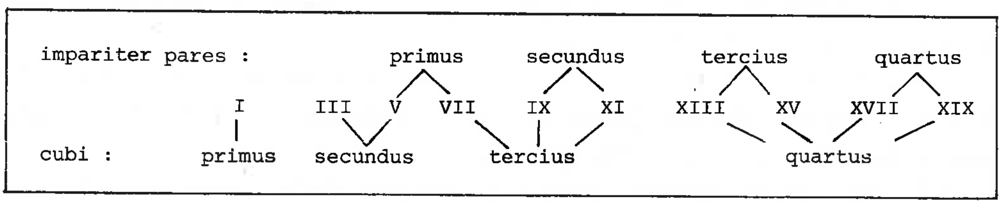
V 81v primum actu / tetragonum, id est quaternarium.[d] Quibus si iunxeris quinque, habebis secundum tetragonum, id est novenarium.[e] Iunge septem et facies tertium, id est sedenarium.[f] Iunge novem et facies quartum, id est viginti quinque. Iunge undecim et facies quintum, id est triginta sex.

IX

CUBORUM CREATIO[3]

Si autem quemlibet tetragonum per suum latus multiplices, cubi forma nascetur. Multiplica quaternarium per latus suum, id est binarium, et fient bis bini bis, id est octo. Multiplica novenarium per latus suum, id est ternarium, et fient ter terni ter, id est viginti septem. Multiplica sedenarium per latus suum, id est quaterna-
T 194v rium, et fient quater quaterni quater, / id est sexaginta quatuor. Et hoc est quod legis, quod tetragoni, seu cubi, non aliorum quam imparium coacervatione producuntur.

Alia creatio cuborum[g] :



Quotus fuerit cubus tot in se impares aggregat.

d) quaternarium / quatuor *L*
e) novenarium / novem *L*
f) sedenarium / sedecim *L*
g) Dans *L* , on ne trouve que les chiffres du schéma suivant, sans texte. Le texte de *T* et de *V* est en rouge, exception faite, dans *V* , de la dernière ligne.

3) Cf. Boèce, *Inst. Arithm.* II,25 (Friedlein, p. 111,10 - p. 113,14).

X

SERIES PARIUM / NUMERORUM [1)]

L 37v

Duo, quatuor, sex, octo, decem, duodecim, quatuordecim, sedecim, decem et octo, viginti, viginti duo, viginti quatuor, viginti sex, viginti octo.

V 82r *Quomodo creentur parte altera longiores.*[a] / Pares aggregati sibi per singulos, singulos *parte altera longiores* creant. Quatuor enim duobus aggregati, primum parte altera longiorem faciunt, id est bis ternos.[b] Quibus iuncti sex, faciunt ter quaternos, id est duodecim. His applicati octo, faciunt quater quinos, id est viginti. Adde decem, et recipies quinquies senos, id est triginta.

XI

ALIA CREATIO PARTE ALTERA LONGIORUM [2)]

Item si dispositio numero naturali secundus per primum, vel tercius per secundum, seu quartus per tercium et seriatim sequens quilibet per precedentem suum ducatur, proculdubio *parte altera longior* procreatur. Est enim parte altera longior numerus cuius alterum latus, alterum unitate tantum precedit. Nam cuius[c] latera non sola discrepant unitate, sed quolibet alio numero, ut bis quatuor, vel bis quinque, hic non parte altera longior, sed *ante longior* dicetur. Argumentum autem est, alteritatem in binario numero iuste con-
T 194v bstitui, quod non dicitur alterum, nisi ex duobus ab his inter / quos bene loquendi ratio non negligitur.

Amplius. Impar numerus sola unitate perficitur, par vero dualitate sola, id est solo binario. Cuius enim medietas est unus, ille impar est. Cuius vero duo, hic paritate recepta, in gemina equa dis-
L 38r iungitur. Quare dicendum est imparem numerum eiusdem atque in / sua

---

a) Quomodo creentur parte altera longiores *L* / *om.* *T V*
b) bis ternos. / bis ternos, id est sex *V L*
c) cuius / cum *L*

---

1) Cf. Boèce, *Inst. Arithm.* II,28 (Friedlein, p. 117,25 ss et, pour ce passage, particulièrement, p. 119, 14 ss).
2) Cf. Boèce, *Inst. Arithm.* II,26 (Friedlein, p. 115,5 - p. 116,15).

V 82[v] se natura tenentis im/mutabilisque substantie esse participem, iccirco quod ab unitate formetur.

Parem vero plenum esse alterius nature, eo quod a dualitate completur.

XII

PROPORTIONES HABITUDINE EX QUADRATURA ET PARTE ALTERA LONGIORIBUS CONSTARE[a] 1)

schéma 1.

tetragoni	I	IIII	IX	XVI	XXV	XXXVI	XLIX	LXIIII
differentie	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII
	dupla	sesqualtera	sesquitercia	sesquiquarta	sesquiquinta	sesquisexta	sesquiseptima	sesquioctava
parte altera longiores	II	VI	XII	XX	XXX	XLII	LVI	LXXII[b]

Primus primum precedit uno, secundus secundum duobus, tercius tercium tribus, quartus quartum quatuor. Si vero secundum tetragonum primo parte altera longiori compares, et tercium secundo, et quartum tercio, et quintum quarto, easdem proportiones efficies. Erit enim secundus primi duplus; tercius secundi sesqualter; quartus tercii sesquitercius; quintus quarti sesquiquartus. Sed hic differentie ab unitate non inchoant sicut superius, sed a binario. Rurses tetragoni invicem imparibus differunt, parte altera longiores paribus.

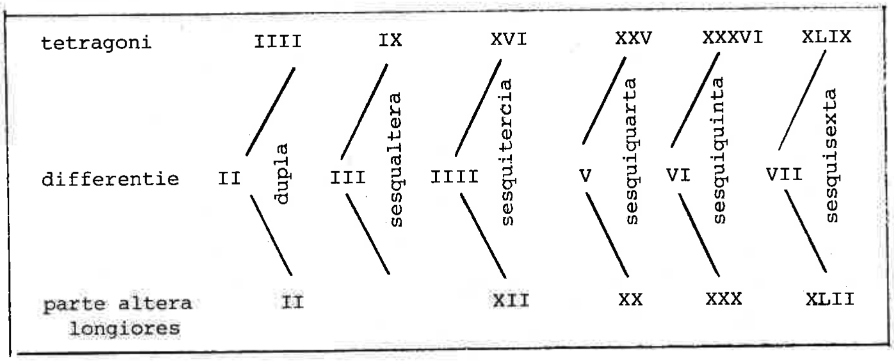
---

a) Proportiones habitudine... constare : "titre d'attente" dans *V* / *om.* *T* / Proportionum habitudines ex quadratis et parte altera longioribus constare *L*
b) la ligne médiane a été omise dans *L*

---

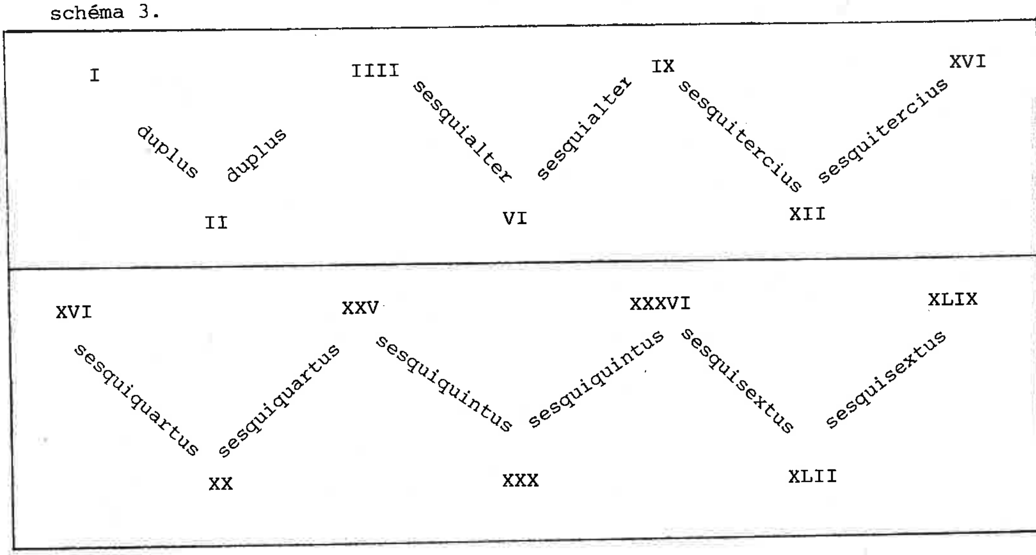
1) Cf. Boèce, *Inst. Arithm.* II,33 (Friedlein, p. 127,10 - p. 131,9). Les schémas contenus dans ce paragraphe se trouvent également chez Boèce : p. 127 (premier schéma); p. 128 (deuxième schéma); p. 132 (troisième schéma).

schéma 2. [c]



T 195r Item si inter primum et secundum tetragonum primum parte altera longiorem ponas, duplex proportio invenitur. Inter secundum vero et tertium tetragonum, secundo parte altera longiori posito, exit proportio sesqualtera. Inter tertium et quartum tetragonum, tertio parte altera longiori constituto, sesquitertia species nasquitur, et in ceteris eodem modo. Et has omnes superparticularium normas, in tetra-
V 83r gonorum et parte altera longiorum conve/nientia, in quamvis longis-
L 38v simam / porrectionem progrediens in offensas reperies.

schéma 3. [d]

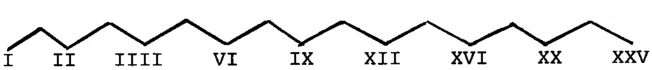


Mixti cum tetragonis parte altera longiores

---

c) Les deux dernières cases ont été omises dans *V* et *L*

d) Le schéma a été omis dans *V*. Dans *L* , nous trouvons la figure suivante :

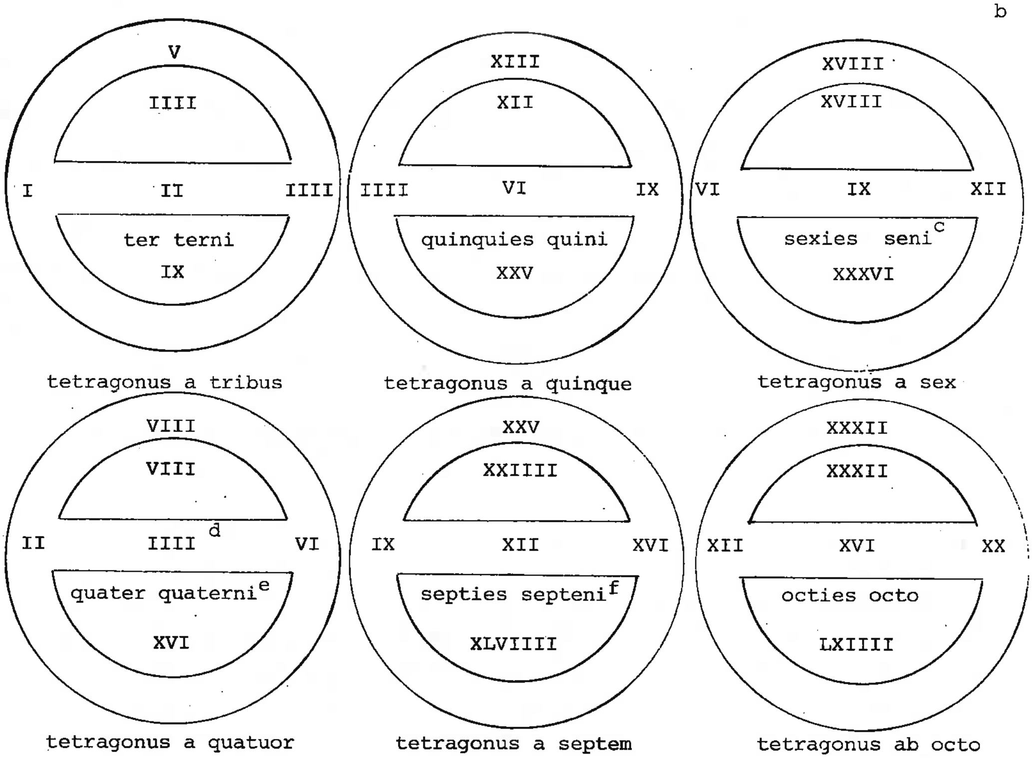


Rursus primo et secundo tetragonis, cum medio eorum parte altera longiori duplicato aggregatis, qui nascitur tetragonus est, ab imparibus[e] creatus, et impar. Et e converso primo et secondo parte altera longioribus, cum medio eorum tetragono bis ducto aggregatis, qui nascitur tetragonus est, a paribus creatus, et par.

XIII

TRIANGULI EX QUADRATIS ET PARTE ALTERA LONGIORIBUS [a] [1]

schéma 1. [b]



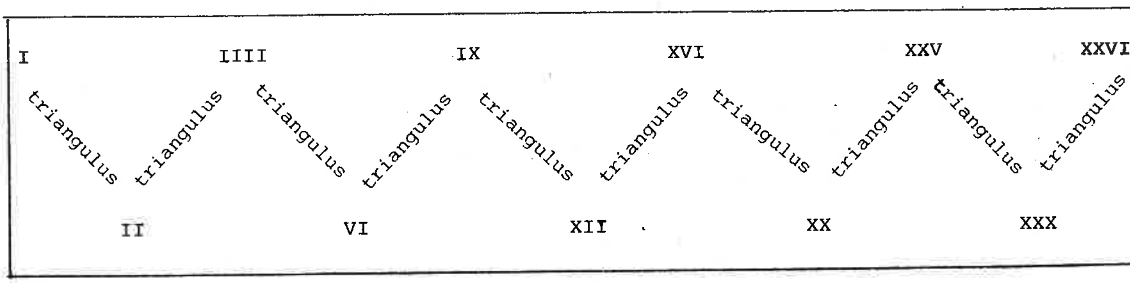
e) ab imparibus *VL*/ a paribus *T*

a) Trianguli ex quadratis et parte altera longioribus *L*
b) Le schéma a été omis dans *L*
c) sexies seni / sexies sex *V*, qui a inversé les tetragoni *a sex* et *a septem*
d) XXIII *corr.* IIII *V*
e) quater quaterni / quater quattuor *V*
f) septies septini / septies septem *V*

1) Cf. Boèce, *Inst. Arithm.* II,33 (Friedlein, p. 126 ss). Le schéma 1. se trouve chez Boèce, p. 130; le schéma 2. à la p. 127.

T 195[r]b Ex quadratis et parte altera longioribus omnis ratio formarum constat. Trianguli quippe qui cunctas alias formas collecti producunt. His iunctis velut quibusdam elementis oriuntur. Ex primo enim tetragono et primo parte altera longiore, id est ex uno et duobus, fit ternarius primus actu triangulus. Item ex primo parte altera longiore et secundo tetragono, id est binario et quaternario, fit senarius secundus actu triangulus. Rursusque ex eodem tetragono, scili-
V 83[v] cet / quaternario,[g] et secundo parte altera longiore, id est senario, fit denarius, tercius actu triangulus. Et ad eundem modum ceterorum triangulorum ratio constabit.

schéma 2. [h]



XIV

L 39[r] ORDO PLANARUM FIGURARUM QUARUM PRINCIPIUM ET ORIGO TRIANGULA[a] [1)]

schéma 1

Trianguli	I	III	VI	X	XV	XXI
Quadranguli	I	IIII	IX	XVI	XXV	XXXVI
Pentagoni	I	V	XII	XXII	XXXV	LI
Exagoni	I	VI	XV	XXVIII	XLV	LXVI
Eptagoni	I	VII	XVIII	XXXIIII	LV	LXXXI

---

g) quaternario *V L*/ quarto *T*

h) Dans *V* et *L* se trouve une variante de ce schéma :

quadrati	I		IIII		IX		XVI		XXV	XXXVI
trianguli	III	VI	X	XV	XXI	XXVIII	XXXVI	XLV	LV	LXVI
parte altera longiores	II		VI		XII		XX		XXX	

a) triangula / triangula est *L*

1) Cf. Boèce, *Inst. Arithm.* II,17 (Friedlein, p. 101). Pour les schémas et figures, voir *ib.* II,16 (Friedlein, p. 100. Voir aussi les pages 92-93, 95, 97).

Ex [b] duobus primis triangulis, primus actu tetragonus nascitur. Ex secundo et tercio triangulo fit secundus actu quadrangulus. Ex tercio et quarto triangulo fit tercius quadrangulus, et sic de cetero. Ex primo triangulo et secundo actu quadrangulo, fit primus
f195v actu pentagonus. Item ex secundo / triangulo et secundo actu, id est tercio quadrangulo, fit secundus actu, id est tercius pentagonus. Ex tercio triangulo et quarto quadrangulo fit quartus pentagonus. Item ex primo triangulo et primo actu pentagono, fit primus actu exagonus. Ex secundo triangulo et secundo actu, id est tercio pentagono, fit secundus actu, id est tercius exagonus.

Eodem modo relique figure procreantur, ut singulis ad creationem sequentis, prima semper, id est triangula figura, iungantur. [2)]

[c]

schéma 2.

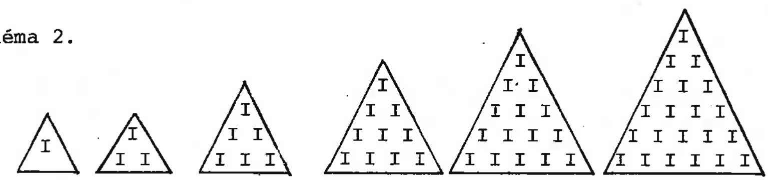


schéma 3.

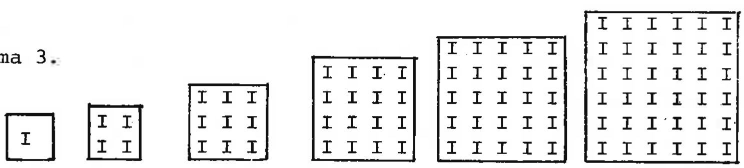
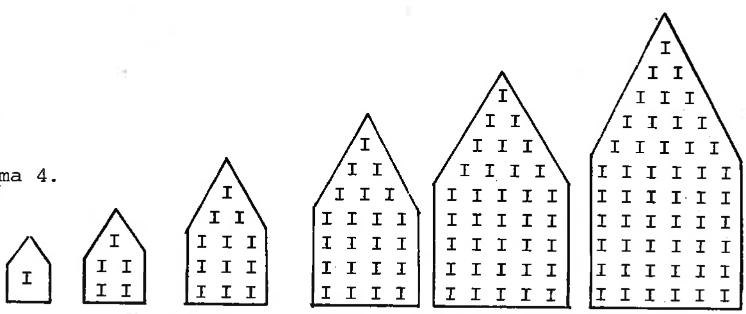


schéma 4.



---

b) Ex / *om.* *V L*
c) Les figures ont été omises dans *V*

---

2) A la suite de l'erreur de reliure déjà mentionnée (description des manuscrits, dans *Cahiers*...29, p. XXI), le reste du texte de *V* se trouve au début du manuscrit.

XV

DE RELATA AD ALIQUID QUANTITATE [a]

V 1r *Ad aliquid vero quantitatis*[b] *duplex est prima divisio. Omne enim aut equale est aut inequale, quicquid alterius comparatione*[c] *metitur.*

Equale quidem[d] *est, quod ad*[e] *aliquid comparatum, neque minore sum-*
L 39v *ma infra est, neque maiore transgreditur, ut denarius denario, / vel ternarius ternario, vel*[f] *cubitus cubito, vel*[f] *pes pedi et his similia. Hec autem pars*[g] *relate ad aliquid quantitatis, naturaliter indivisa est.*[1)]

Inequalis vero quantitatis[h] *gemina divisio est... in maius videlicet et in minus.*[i 2)] *Maioris inequalitatis, quinque partes sunt. Est enim una que vocatur multiplex , alia superparticularis, alia superpartiens,*[j] *quarta multiplex superparticularis, quinta multiplex superpartiens.*[k] *His igitur quinque*[l] *maioris inequalitatis partibus opposite sunt quinque partes minoris inequalitatis quemadmodum ipsum maius minori semper opponitur. Eisdemque*[m] *nominibus nuncupantur, sola tantum sub propositione distantes. Dicitur enim submultiplex, subsuperparticularis,*[n] *subsuperpartiens, submultiplex superparticularis, submultiplex superpartiens.*[k 3)]

V 1v *Est ergo multiplex numerus qui comparatus cum alio, vel altero,*[o] *illum*[p] *habet plus quam semel. Quod primum in naturalis numeri dispositione conveniet... Erit quoque*[q] *ad unitatem binarius duplus, ter-*

---

a) De relata ad aliquid quantitate *L* / *om. T V*
b) *Ad aliquid vero quantitatis V* (=Boèce) / *quantitas T* / *Ad aliquid quantitatis L*
c) *comparatione V L*(=Boèce) / *comparationem T*
d) *quidem V L*(=Boèce) / *quid T*
e) *ad* / *om. V*
f) *vel* / *om. L*
g) *pars V L*(=Boèce) / *partes T*
h) *quantitatis V L* (=Boèce) / *quantitas T*
i) *et in minus V L* / *et minus T* (= Boèce)
j) *Est enim una que vocatur multiplex, alia superparticularis, alia superpartiens, quarta multiplex superparticularis, quinta multiplex superpartiens* / *multiplex, superparticularis, superpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens V L*
k) *superpartiens V L* / *superpartitiens T*
l) *quinque* / *om. V L*
m) *Eisdemque* / *Eisdem quoque L*
n) *subsuperparticularis* / *superparticularis L*
o) *cum alio vel altero* / *cum altero V L* (= Boèce)
p) *illum* / *ipsum V L*
q) *quoque* / *itaque V L*

---

1) Boèce, *Inst. Arithm.* I,21 (Friedlein, p. 45, 11-20).
2) *ib.* I,21 (p. 45, 26-27).
3) *ib.* I,22 (p. 46, 6-17).

narius triplus, quaternarius, quadruplus, atque ita in ordine progredientes omnes texunt multiplices quantitates...

Contra hunc discriminatus est ille qui vocatur submultiplex, qui in alterius comparatione productus, maioris summam plus quam semel metitur...

L 40r Si bis solum maiorem numerum minor metiatur,[r] / subduplus vocabitur, si ter, subtriplus, si quater, subquadruplus... Dicitur igitur[s] unus duorum subduplus, trium subtriplus, quatuor subquadruplus et consequenter.[4]

P 196r Superparticularis vero numerus est qui / ad alterum comparatus, habet in se totum minorem et eius aliquam partem. Cuius si medietatem habeat, vocatur sesqualter. Si terciam partem, vocatur[t] sesquitercius. Si[5] ...quartam, sesquiquartus et similibus nominibus in infinitum ductis, in infinitum quoque superparticularium forma progreditur...

V 2r Subsuperparticularium autem qui toti habentur et eorum aliqua pars, alius vocatur subsesqualter, alius subsesquitercius, alius subsesquiquartus... harum quoque speciorum infinita est multitudo, quia eiusdem numeri species interminabili progressione funguntur[6] et maiores quidem dicuntur duces, minores vero comites...

Superpartiens numerus est qui, ad alium comparatus, habet eum totum infra se, et eius aliquas partes, quot videlicet ipsa tulerit comparatio[7]... ut quinarius ternarium totum et eius duas partes. Septenarius quaternarium totum et eius tres partes. Sunt que huius species innumere superbipartiens, supertripartiens et deinceps... Hec autem habitudo a duabus partibus tercius incipit.[8]

Subsuperpartientes sunt, qui toti habentur et eorum alique partes, ut ternarius a quinario, quaternarius a septena/rio.[9] 40v

Multiplex superparticularis est qui, ad alium numerum comparatus, habet eum plus quam semel et eius aliquam partem... ita ut qui 2v duplicem habuerit aliquem numerum / et eius mediam partem, duplex

r) metiatur / metitur V L
s) igitur / ergo V L
t) Si terciam partem, vocatur sesquitercius / Si terciam, vocatur sesquitercius V/ Si terciam, sesquitercius L

4) ib. I,23 (p. 46,21 - p. 47,21).
5) Fin du texte dans le ms 969 de Troyes (T).
6) ib. I,24 (p. 49,15 - p. 50,3).
7) ib. I,28 (p. 57,12-15).
8) ib. I,28 (p. 56,16)
9) ib. I,28 (p. 58,11 ss).

sesqualter vocatur;[u] *qui vero terciam, duplex sesquitercius; qui quartam, duplex sesquiquartus. Quod si ter tenuerit numerum et eius mediam, vel terciam, vel quartam partem, dicatur triplex sesqualter, triplex sesquitercius, triplex sesquiquartus et de ceteris*[10] *similiter, singulis competentibus sibi nominibus appellatis.*

Multiplex superpartiens est, cum numerus ad numerum comparatus, habet eum in se totum plus quam semel et eius duas partes,[v] *vel tres, vel quotlibet*[w] *plures, secundum numeri superpartientis figuram. Ubi tam in hoc quam in superpartienti observandum, ne duas medietates, vel duas quartas, vel duas sextas, super totum numerum, cui comparatur, habeat, sed duas tercias, vel duas quintas, vel duas septimas.*[11] *Alioquin non superpartiens, seu multiplex superpartiens, sed dissimilis prorsus habitudinis esset. Nam ubi due medietates superessent,*
V 3r *duplex oriretur habitudo, ubi due quarte, sesqualtera; ubi due sexte/, sesquitercia. Si quidem due quarte medietas est, et rursus due sexte, tercia pars est. Non est difficile secundum priorum exempla positorum, hos etiam preter nostra exempla numeros invenire.*

L 41r *Voca/buntur hii, secundum proprias partes, duplex superbipartiens, vel duplex supertripartiens et triplex superquadripartiens et similiter, ut octo ad tres comparati, faciunt duplicem superbipartientem. Et sedecim ad sex et quicumque ab octonario incipientes, octonario sese numero transgrediuntur, comparati ad eos qui a tribus inchoantes ternaria sese quantitatem*[x] *pretereunt. Nec erit difficile alias eius partes secundum predictum modum diligentibus reperire. Hoc quoque meminisse debemus, quod minores et comites non sine subprepositione nominantur, ut sit subduplex superbipartiens, subduplex supertripartiens, subtriplex supertripartiens, subtriplex superquadripartiens.*[12]

---

u) *vocatur V / vocetur L* (*om.* Boèce)
v) *partes / om. V* (=Boèce)
w) *quotlibet / quelibet L*
x) *quantitatem V* (=Boèce) / *quantitate L*

---

10) *ib.* I,29 (p. 61,2-4 , 18-24).
11) *ib.* I,31 (p. 65,1-9).
12) *ib.* I,31 (p. 65,12 - p. 66,2).
Fin du texte dans le ms BN lat. 3011 (*V*). Nous transcrirons la suite d'après le ms Luxembourg 60 (*L*).

XVI

HIC ADDITUR QUEDAM DESCRIPTIO IN SE CONTINENS OMNIA INEQUALITATIS GENERA

Sit igitur talis descriptio in qua ponatur in ordinem usque ad denarium numerum continui numeri ordo naturalis. Et secundo versu duplus ordo texatur; tercio, triplus; quarto, quadruplus et hoc usque ad decuplum. Sic enim cognoscemus quemadmodum superparticulari et superpartienti et cunctis aliis princeps erit species multiplicis. Et quedam alia simul inspiciemus et ad subtilitatem tenuissima et ad scientiam utilissima et ad exercitationem mentis iocundissima.[1]

Hoc autem in hac dispositione divinum, quod omnes angulares numeri tetragoni sunt.[2] *Circum ipsos vero qui sunt, id est circum angulares, longilateri sunt,*[3] hoc est parte altera longiores.

I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX	X
II	IIII	VI	VIII	X	XII	XIIII	XVI	XVIII	XX
III	VI	IX	XII	XV	XVIII	XXI	XXIIII	XXVII	XXX
IIII	VIII	XII	XVI	XX	XXIIII	XXVIIII	XXXII	XXXVI	XL
V	X	XV	XX	XV	XXX	XXXV	XL	XLV	L
VI	XII	XVIII	XXIV	XXX	XXXVI	XLII	XLVIII	LIIII	LX
VII	XIIII	XXI	XXVIII	XXXV	XLII	XLIX	LVI	LXIII	LXX
VIII	XVI	XXIIII	XXXII	XL	XLVIII	LVI	LXIIII	LXXII	LXXX
IX	XVIII	XXVII	XXXVI	XLV	LIIII	LXIII	LXXII	LXXXI	XC
X	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC	C [4]

Ad primum igitur versum omnes, qui secuntur, collati ordinatas convenientesque multiplicis species reddent. Sin vero ad secundum cunctos, qui tercii sunt ordinis, aptaveris, ordinatas species superparticularis agnosces. Quod si tercio ordini, quicumque sunt in quinto versu, compares superpartientis numeri species positas convenienter aspicies. Multiplex vero superparticularis ostenditur, cum ad secundum versum omnes, qui sunt quinti versus serie comparantur, vel qui sunt in septimo, vel qui sunt in nono. Atque in infinitum si sit ista descriptio, in infinitum huius proportionis species procreabuntur. Si autem ad tercium versum octavum comparaveris, multiplicis superpartientis species positas miraberis. [5]

---

1) Boèce, *Inst. Arithm.* I,27 (Friedlein, p. 53,1 ss).
2) *ib.* I,27 (Friedlein, p. 55,28 - p. 56,1).
3) *ib.* I,27 (Friedlein, p. 56,7).
4) *ib.* I,27 (Friedlein, p. 53,10-20).
5) *ib.* I,30 (Friedlein, p. 64,9 ss).

XVII

L 42r DEMONSTRATIO QUEMADMODUM / ORDINIS INEQUALITAS AB EQUALITATE PROCESSERIT

Restat autem nobis profundissimam quandam tradere disciplinam, que ad omnem nature vim rerumque integritatem maxima ratione pertineat. Magnus quippe in hac scientia fructus est, si quis non nesciat quod bonitas diffinita et sub scientiam cadens, animoque semper imitabilis et perceptibilis prima natura est, et sue substantie decore perpetua. Infinitum vero malicie dedecus est, nullis propriis principiis nixum, sed natura semper errans a boni[a] *definitione principii tamquam aliquo signo optime figure impresso*[b] *componitur, et ex illo erroris fluctu*[c] *retinetur. Nam nimiam cupiditatem ire atque immodicam effrenationem, quasi quidam rector animus pura intelligentia roboratus astringit. Et has quoddammodo inequalitatis formas, temperata bonitate constituit. Hoc autem erit perspicuum, si intelligamus, omnes inequalitatis species ordinesque*[d] *ab equalitatis crevisse primordiis, ut ipsa quoddammodo equalitas matris et radicis optinens vim ipsa omnes inequalitatis species ordinesque profundat. Sint enim tres termini equales, id est tres unitates, vel tres*[e] *bini, vel tres*[e] *trini, vel tres*[e] *quaterni, vel quantos ultra libet ponere. Quod enim in tribus unis terminis evenit, idem contingit in ceteris. Ex his igitur*
L 42v *secundum precepti nostri ordinem videas primum nasci / multiplices et in his duplices prius, dehinc triplos, deinde quadruplos. Et ad eundem ordinem consequentes. Rursus multiplices si convertantur, ex his superparticulares orientur. Et ex duplicibus quidem sesqualteri ex triplis sesquitercii, ex quadruplis sesquiquarti et ceteri in hunc modum. Ex superparticularibus vero conversis superpartientes nasci necesse est. Ita vero ut ex sesqualtero nascatur superbipartiens, supertripartientem sesquitercius gignat et ex sesquiquarto*[f] *superquadripartiens. Rectis autem positis neque conversis prioribus superparticularibus multiplices superparticulares oriuntur. Rectis vero superpartientibus multiplices superpartientes efficiuntur. Precepta autem tria hec sunt, ut primum numerum primo facias parem,*[g] *secundum*

a) boni (Boèce) / bonum
b) impresso / impressa (Boèce)
c) fluctu (Boèce) / fructu
d) ordinesque (om. Boèce).
e) tres / ter (Boèce)
f) sesquiquarto (Boèce) / sesquialter
g) parem (Boèce) / parere

vero primo et secundo, tercium primo, duobus secundis et tercio. Hoc igitur cum in terminis equalibus feceris, ex his qui nascentur, duplices erunt. De quibus duplicibus si idem feceris, triplices procreantur et de his quadruplices. Atque in infinitum omnes formas numeri multiplices explicabit. [1]

...

1) Boèce, *Inst. Arithm.* I,32 (Friedlein, p. 66,5 - p. 67,21).

A P P E N D I C E

III

ODON DE MORIMOND

ANALETICA NUMERORUM ET RERUM

TABLES

d'après le ms. BN fonds lat. 3352 A

APERÇU

PROLOGUS	:	<u>SIGNIFICATIONES RERUM ET MYSTERIA NUMERORUM</u>
PRIMA CLAUSULA	:	<u>DE FIGURIS NUMERORUM</u>
- prima subdivisio	:	INSTITUTIONES ANNOTATIONUM
- secunda -	:	DIFFINITIONES NATURARUM
- tercia -	:	VIRTUTES REPRESENTATIONUM
SECUNDA CLAUSULA	:	<u>DE PROPRIETATIBUS NUMERORUM</u>
- prima subdivisio	:	DE SPECIEBUS ET REGULIS GENERATIONUM
- secunda -	:	COGNOMINATIONES NUMERORUM CUM INTERPRETATIONIBUS
- tercia -	:	RELATIONES NUMERORUM
TERCIA CLAUSULA	:	<u>DE SIGNIFICATIONIBUS NUMERORUM</u>
- primum capitulum	:	OCTO MODI QUIBUS SIGNIFICATIONES NUMERORUM APERIUNTUR
- secundum -	:	DE UNITATE [1]

1) Dans les mss le chapitre sur l'unité fait suite aux modes d'interprétation. Mais logiquement, ce chapitre constitue plutôt la deuxième grande partie de l'ouvrage. Plus tard ODON écrit deux autres longs traités sur les nombres deux et trois. Nous les laissons de côte pour l'instant.

TABLES

INCIPIUNT ANALETICA NUMERORUM ET RERUM IN THEOGRAPHYAM

PROLOGUS

EXPLICIUNT CAPITULA

DE FIGURIS NUMERORUM

INCIPIUNT CAPITULA IN PRIMAM SUBDIVISIONEM CLAUSULE PRIME

EXPLICIUNT CAPITULA

CAPITULA SECUNDE SUBDIVISIONIS SUNT HEC

i Comprehensio dictorum et dicendorum
ii Diversitas appellationum cum descriptione numerorum
iii Sacramenta appellationum singularum
iv De nominibus que trahuntur secundum potentiam et a sedibus
v Descriptio alphabeti cum superpositione numerorum
vi Cur singule litterarum sibi presciptos exprimant numeros
vii Que vocales quos numeros notent et quare
viii Que semivocales quos numeros notent et quare
ix Que mute quos numeros notent et quare
x Digestio greci alphabeti cum superpositione numerorum
xi Qualiter secundum grecas litteras aperitur obscuritas numeri nominis bestie, secundum Apochalipsim
xii Quod per easdem litteras numerus edificationis templi Dominici reperitur se-
xiii cundum habitum
xiv Quod idem ipse numerus repperitur secundum effectum
xv Sententia beati Hylarii proponitur quam per easdem litteras constat repperiri
xvi Sententia beati Ieronimi proponitur que huic sententie contraire videtur.

EXPLICIUNT CAPITULA

DE FIGURIS NUMERORUM

INCIPIUNT CAPITULA TERCIE SUBDIVISIONIS

EXPLICIUNT CAPITULA

DE PROPRIETATIBUS NUMERORUM

INCIPIUNT SECUNDA CLAUSULA : DE PROPRIETATIBUS NUMERORUM

INCIPIUNT CAPITULA PRIME SUBDIVISIONIS

EXPLICIUNT CAPITULA

DE PROPRIETATIBUS NUMERORUM

INCIPIT SECUNDA SUBDIVISIO

INCIPIUNT CAPITULA

EXPLICIUNT CAPITULA

DE PROPRIETATIBUS NUMERORUM

INCIPIT TERCIA SUBDIVISIO
CAPITULA EIUSDEM

EXPLICIUNT CAPITULA

DE SIGNIFICATIONIBUS NUMERORUM

INCIPIT TERCIA CLAUSULA : DE SIGNIFICATIONIBUS NUMERORUM

SUB PRIMO CAPITULO DISTINCTIONES ISTE CONTINENTUR

SUB SECUNDO CAPITULO CONTINENTUR SEPTEM SIGNIFICATIONES UNITATIS CUM DISTINCTIONIBUS ISTIS

EXPLICIUNT CAPITULA ET DISTINCTIONES

CORRIGENDA ET ADDENDA AD FASCICULUM 29
(Geoffroy d'Auxerre & Thibault de Langres)
Copenhague 1978

TABLE DES MATIERES

p.VI, l. 8 : In medie summe / LIRE : in medio summe

NOTE BIOGRAPHIQUE

p.XVI,l. 5 : entre autre choses, ce que confirme.../ LIRE : entre autres choses, ce qui est confirmé par l'ordre dans lequel...ainsi que par les...

TEXTE DE GEOFFROY D'AUXERRE

p. 7, l.10 : angelicis / LIRE : angelis
p. 8, note 7 : nombre d'amour / LIRE : nombre d'affinité (dernière ligne)
p.14, l.17 : septedenarii / LIRE : denarii
p.15, l.18 : spes erexerit / LIRE : promissio, aut certe nec remunerationis nec resurrectionis spes, erexerit
p.17, l. 1 : in qua / LIRE : in qua demum
p.23, l. 5 : qui / LIRE : que
p.28, l. 7 : quod / LIRE : quos

TEXTE DE THIBAULT DE LANGRES

p.31, l. 4 : lucrefactionis / LIRE : lucrifactionis (de même, pour la var. c)
p.31, l.6-7 : sub fine, ... concludens / LIRE : sub fine... concludens,
p.37, l. 7 : duodenarius / LIRE : duodenarium
p.37,var.a) : interscalari / intercalari / LIRE : interscalaris / intercalaris
p.38, l.13 : *offerbantur* /LIRE *offerebantur*
p.38,var.d) : LIRE : offerebantur *O L*/ offerbantur P^2
p.39, l.2 : sollempne / LIRE : sollempni
p.39, l. 9 : ter / LIRE : tibi
p.39,var.d) : supprime /LIRE :suppreme
p.43, l.10 : pentecostem / LIRE : pentecosten
p.44, l. 3 : quiddam / LIRE : quidam
p.46, l. 2 : perfectione / LIRE : perfecte
p.46,var.k) : LIRE : perfecte / perfectione *L* / *om. O*
p.46,note 14 : *Inst.Arithm.* / LIRE : *Inst.Arithm.* I,20 (Friedlein,p.41,25-p.42,1)
p.49,l.6-8 : LIRE : mille : ecce tercium limitem habes. Decies mille faciunt decem milia : ecce quartum. Decies decem milia... centum milia : ecce
p.52, l. 7 : *accedet* / *accidet*
p.55,l.8-9 : LIRE : *Qualiter sumatur significatio in parte altera longioribus et antelongioribus.*[a]In parte altera longioribus vel antelongioribus
p.55,var.a) numeris, significatio ... (Supprimer les deux premières lignes de la var. a))
p.56, l. 3 : *psalmis* / LIRE : *psalmos*
p.56,note 3 : LIRE : *Mor.* *PL* LXXVI, 1151.
p.57,l.11-12: sufficient / LIRE : sufficerent
p.67, l.12 : *cumulato* / LIRE : *cumulata*
p.69, l. 8 : quinque / LIRE : quandoque
p.71,note 11: dernière ligne : LIRE : la légion romaine qui, selon Thibault,(p.52, 14ss) comptait 6666 soldats.
p.76,var.v) : Quos / LIRE : Quot
p.78,var.gg): quantitae / LIRE : quantitate
p.80, l. 7 : homicida fuit ab inicio / LIRE : *homicida fuit ab inicio* (*Ioh.*VIII,44)
p.82,var.o) : optamus *O* / LIRE : adoptamus
p.88, l. 8 : sufficienter / LIRE : sufficientem
p.94,var.h) : vertatem *C* / LIRE : veritatem *O*
p.94,l.5-6 : *de patientia... sanctorum* / LIRE : de patientia... sanctorum
p.95, l. 1 : primum / LIRE : secundum
p.98,var.j) : unitatibus / monadibus *O* = var. k. La var. j (oubliée): aves /*om.O*.
p.100,var.d): quondoque / LIRE : quandoque
p.100,var.f): consilu / LIRE : consilii
p.106,l.13 : sacramentus / LIRE : sacramentum
p.107,l. 7 : trinitatis / LIRE : trinitas
p.107,l. 8 : *Trinitate* / LIRE : *Trinitati*
p.107,l.13 : Mediator Dei... Iesus / LIRE : *Mediator Dei... Iesus*